«НАША ШКОЛА»

№ 6, 2009

Науково-методичний журнал

Виходить один раз на два місяці з вересня 1993 р.
Засновано в 1923 р., відновлено в 1993 р.
Зареєстровано 14 березня 1994 р. Серія ОД № 158.

Згідно з постановою президії Вищої атестаційної комісії України від 9 червня 1999 року № 1-05/7 журнал «Наша школа» увійшов до Переліку № 1 наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт з педагогіки та психології на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук.

Засновники:

Управління освіти Одеської обласної державної адміністрації

Одеський обласний інститут удосконалення вчителів

Міжгалузевий науково-технічний центр «Нормаль»

Обласне відділення Педагогічного товариства

Адреса редакції: 65014, м. Одеса, пров. Нахімова, 8. Відділ навчально-методичного забезпечення та педагогічних видань ООІУВ. Тел. 729-45-12.

Затверджено на засіданні вченої ради ООІУВ. Протокол № 4 від 24.06.2009 р.

Здано у вироб. 08.10.09. Підп. до друку 11.11.09. Формат 60×84 1/8. Папір друк. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 15,35. Обл.-вид. арк. 13,65. Тираж 800 прим. Зам. № 26.

Надруковано у друкарні видавництва «Екологія». м. Одеса, вул. Базарна, 106, к. 313
Тел.: (0482) 33-07-18, 37-07-95, 37-14-25.

Одеса • Одеський ОІУВ • 2009

ЗМІСТ

РІШЕЛЬЄВСЬКИЙ ЛІЦЕЙ: 20 РОКІВ ВІД ДНЯ ВІДНОВЛЕННЯ!

Мені двадцять?! Невже?! Не може бути! А здається все було тільки вчора...

Ні, мені більше, набагато більше!

1818 рік. Одеса... Зима... Січень місяць... Дме холодний, пронизливий вітер. Сніг, кружляючи, лягає на дерева, на дахи будинків, притрушує мостову. Холодно... а на душі тепло і радісно. Сьогодні урочисте відкриття ліцею (наказ про створення ліцею датується 2 травня 1817 року)! Сам граф Ланжерон вітає з цим святом. Так! Я є! Я прийшов у цей світ, щоб зробити його кращим, щоб примножити славу Південної Пальміри. А яке дали мені ім'я!.. Рішельєвський ліцей! На честь людини, яка стільки зробила для нашого міста, людини, біля пам'ятника якій сучасні ліцеїсти дають клятву бути благородними і чесними, вірними і відданими науці. Це ім'я герцога Армана Емануеля дю Плессі Рішельє.

Незважаючи на те, що це відбувалося дуже давно, мої стіни пам'ятають лекції, які тут читали математик В. В. Петровський, хімік Д. І. Менделеєв, археолог Беккер. Тут читали свої вірші О. С. Пушкін і Адам Міцкевич. А як я пишався своїми випускниками — Ю. К. Олешею, М. А. Врубелем, Л. І. Пастернаком.

Минуло зовсім небагато часу (якихось 48 років). Був травень. Цвіли акації... Весняне сонце лагідно пригрівало землю... Вітерець доносив веселий шум прибою. А у мене знов свято! Тепер я не тільки змінив адресу, я став дорослим... Я став Новоросійським Імператорським університетом — Альма-матер для багатьох студентів. Я відчував себе щасливим, але думками постійно повертався на вулицю Катериненську, в будинок між Ланжеронівською і Дерибасівською, повертався в той далекий час, коли «дерева були маленькими», коли на одеських дорогах ще не лежав асфальт. А головне — коли в ліцейських коридорах лунали дитячі голоси. І спогади ставали реальністю...

Я знову є! Тепер вже на розі вулиць Єлисаветинської і Торгової.

1989 рік. Осінь... Перше жовте листя... Крики чайок над морем... Шум автомобілів... Звуки «перших дзвоників». І серед них один, який сповіщав про те, що середня школа № 36 стала ліцеєм при Одеському національному університеті ім. І. І. Мечникова. А ще через два роки я знову отримав назву Рішельєвський. Я був відроджений не тільки для того, щоб відновити традиції, які історично склалися в далекому від нас 1818 році, але й щоб розвивати їх, примножувати славу свого міста, своєї країни. Мені здається, що все вдалося. Тепер я заклад освіти з професійним навчанням, мета якого — формування інтелектуальної еліти України. Мене знають не тільки в Україні, але й в Європі, Австралії, Америці. І це завдяки юним обдарованим математикам, фізикам, хімікам, біологам, економістам, які тут навчаються. Вони щороку підтверджують свої знання на обласних та Всеукраїнських турнірах, конкурсах-захистах Малої академії наук, Міжнародних олімпіадах з біології, математики, фізики, Всеукраїнських олімпіадах з профільних дисциплін. І треба сказати, що призові місця, здобуті на інтелектуальних змаганнях, творчих конкурсах та фестивалях, — звичне явище. Так і 2009 року команда України, яка складалася з учнів Рішельєвського ліцею, на Міжнародному турнірі юних фізиків у Китаї посіла третє місце і була нагороджена «Бронзовою медаллю». Вважаю, гарний подарунок для ювіляра?!

А все це результат систематичної і сумлінної роботи всього колективу. Сьогодні тут працюють висококваліфіковані педагоги, небайдужі до майбутнього своєї країни. Саме завдяки їм, тим, хто присвятив своє життя такій нелегкій, такій відповідальній і, в той же час, такій благородній справі, як навчання і виховання, хто не тільки стоїть з крейдою біля дошки, але й пише сценарії для ліцейських свят, статті для «Ліцейського вісника», виступає на літературних вечорах, керує командою «Що? Де? Коли?», танцювальним і вокальним колективами, організовує екологічні експедиції...

Серед них 1 заслужений працівник освіти України, 4 заслужених вчителя України, 7 кандидатів наук, 14, нагороджених знаком «Відмінник освіти України», 8 лауреатів Соросівської премії для вчителів, 12 вчителів-методистів, викладачі, аспіранти та студенти Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Про рівень їхньої підготовки яскраво свідчать нагороди — Срібна медаль ВДНГ СРСР, авторські свідоцтва і дипломи Ярмарків педагогічних ідей і технологій, Соросівський грант, відзнаки Національного конкурсу «Сто кращих підприємств України» та Міжнародного конкурсу «Золота фортуна», «Свята Софія». І як приємно, коли керує тобою така людина, як Ольга Миколаївна Палладій, заслужений працівник освіти України (і просто чарівна жінка).

Вся ці досягнення були б неможливі без постійної підтримки Управління освіти і науки Одеської державної адміністрації та Одеського національного університету ім. І. І. Мечникова.

Ось так я живу. Я дію, я продовжуюсь в своїх учнях, я творю... Творчість — запорука того, що ліцей буде вічно юним. Неважливо, буде мені двадцять чи двісті. Бо доки душа співає, доки серце і розум служать добру і красі, доти я буду жити. А разом зі мною і ви, для кого ці слова стали гімном:

В дни успеха и печали
Для нас ты — alma mater
Хоть тебя мы превращали
И в вертеп, и в цирк, и в театр.
Тебе к лицу любая роль,
Во всех науках ты — король.
И в мире стрессов и страстей
Для нас есть Бог один — лицей,
Есть Бог — ЛИЦЕЙ!
Виват, лицей, виват. Виват,
ЛИЦЕЙ!
Тебе хвалу поем!
Виват, лицей, виват. Виват,
ЛИЦЕЙ!
Священен этот дом.
Виват, лицей, виват. Виват,
ЛИЦЕЙ!
Тебя благодарим
За то, что здесь живем.
И, слава Богу, здесь
И любим, и творим.
Виват, лицей, виват. Виват,
ЛИЦЕЙ!
Тебе — наш ум, талант и честь.
Виват, лицей, виват. Виват,
ЛИЦЕЙ!
Лицей! Спасибо, что ты есть.

О. О. БУРЛАКА,
вчитель української мови та літератури Рішельєвського ліцею.

МАТЕРІАЛИ III ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-МЕТОДИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ «РІШЕЛЬЄВСЬКІ ЧИТАННЯ» — «ПРОБЛЕМИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ В КОНТЕКСТІ СУЧАСНИХ ТЕНДЕНЦІЙ РОЗВИТКУ ОСВІТНЬОГО ПРОСТОРУ ТА ПЕДАГОГІЧНИХ ТЕХНОЛОГІЙ»

15—17 жовтня 2009 року в місті Одесі відбулася III Всеукраїнська науково-методична конференція «Рішельєвські читання» — «Проблеми та перспективи фізично-математичної освіти в контексті сучасних тенденцій розвитку освітнього простору та педагогічних технологій», яка була присвячена 20-річчю від дня відновлення Рішельєвського ліцею.

На порядок денний конференції були винесені питання, які найбільше хвилюють педагогів:

1. Підручники та навчально-методичні посібники з фізики і математики в сучасних умовах реформування освіти.
2. Сучасні форми і методи навчання фізики і математики з урахуванням тенденцій глобалізації суспільства.
3. Поглиблене та профільне вивчення фізико-математичних дисциплін.
4. Інтелектуальні змагання з фізики та математики як складова розвитку обдарованої особистості.
5. Дидактичні засоби формування змісту завдань інтелектуальних змагань з фізики та математики.
6. Безперервна фізико-математична освіта.
7. Міжпредметні зв’язки у викладанні природничо-математичних дисциплін.
8. Освітні тенденції глобалізованого та інформатизованого суспільства.
9. Компетенції вчителя та його роль у формуванні компетенції учня.
10. Традиційні та сучасні методи вивчення експериментальної фізики в середніх та вищих навчальних закладах.

УДК 376

СУЧАСНІ ІННОВАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

В статті розкрито роль і місце сучасних інноваційних технологій в організації самостійної роботи студентів та окреслено можливі варіанти їх реалізації в умовах кредитно-модульної системи підготовки фахівців з вищою освітою.

In the article a role and place of modern innovative technologies is exposed in organization of independent work of students and the outlined is possible positive variants of their realization in the conditions of the credit-module system of preparation of specialists with higher education.

Процеси європейської інтеграції в освітній галузі охоплюють дедалі більше сфер життєдіяльності. Національна доктрина розвитку освіти України у XXI столітті чітко визначила орієнтир на входження в європейський освітній простір, що передбачає, насамперед, модернізацію освітньої діяльності в контексті європейських вимог і реалізується через практичне приєднання до Болонського процесу. Входження України до єдиного освітнього простору передбачає запровадження європейської кредитно-трансферної та акумулюючої системи (ECTS). За цих обставин усі компоненти системи освіти мають зазнати відповідних змін, у тому числі й індивідуальна, навчально-пошукова, науково-дослідна та інші види самостійної роботи студентів, на яку відводиться більша частина навчального часу у підготовці фахівців з вищою освітою.

Аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури дозволяє зробити висновок про значний інтерес вітчизняних і зарубіжних дослідників до проблеми самостійної роботи студентів. Зокрема, розглядалися питання самостійної діяльності учнів у процесі навчання взагалі (Л. Л. Головко, С. Г. Заскалєта, Л. В. Онучак, Н. Г. Сидорчук, І. А. Шайдур та ін.); аналізувалися організаційні та педагогічні аспекти самостійної роботи студентів (В. М. Буринський, М. І. Сичова, М. М. Солдатенко, І. М. Шимко, С. М. Кустовський та ін.); досліджувалася особистісна орієнтація самостійної роботи (Г. С. Адамів, В. В. Луценко, В. Ф. Паламарчук, Г. М. Романова).

Однак ці питання вже не відповідають запитам сьогодення й особливо у зв'язку з входженням системи освіти нашої держави в європейський і світовий освітній простір.

Мета цієї статті — показати на прикладі діяльності кафедри фізики та методики її викладання Кіровоградського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка, як проводиться робота щодо адаптації нашої освітньої системи до Болонського процесу, які проблеми постають у зв'язку з організацією самостійної роботи студентів у процесі підготовки майбутніх вчителів фізики, які в майбутньому на власному прикладі реалізовуватимуть свій досвід і здобутки з даного аспекту під час організації самостійної роботи учнів у навчанні фізики в загальноосвітньому навчальному закладі.

Зазначимо, що насамперед варто конкретизувати сутність деяких понять і термінів, які ми використовуватимемо у даному випадку. Зокрема, слід акцентувати увагу на тому, що таке інноваційні технології і з'ясувати їх місце в навчальному процесі. Термін «інновація» ми розуміємо як нововведення, цілеспрямовану зміну, що зумовлює перехід системи з одного стану в інший. Інноваційна освітня діяльність відповідає процесам внесення якісно нових елементів в освіту.

Поняття «технології» в педагогічних дослідженнях має різні визначення. Виходячи з етимології слова (з грец. techne — мистецтво, майстерність, уміння і logos — слово, учіння), поняття «навчальна технологія» або «технологія навчання» ми розуміємо як цілісний педагогічний процес засвоєння учнями (студентами) певного обсягу знань. Педагогічні технології досліджували Н. Кузьміна, Н. Тализіна, В. Монахов, М. Кларін, І. Прокопенко, В. Євдокимов та багато інших вчених.

Обґрунтовуючи навчальні технології для тих чи інших суб'єктів навчання, потрібно враховувати об'єктивну закономірність щодо співвідношення між часом аудиторного навчання і самостійної роботи, а також — повне навчальне навантаження студентів для засвоєння сукупності елементів знань з навчальної дисципліни.

Формування сучасного фахівця з вищою освітою вимагає від навчального закладу трансформації всіх видів його діяльності, включаючи навчальну, виховну, управлінську і науково-дослідну.

Нинішнє співвідношення між тривалістю аудиторного навчання і самостійної роботи (50:50) не є, на нашу думку, оптимальним у вищій школі. І не тому, що в США воно є докорінно іншим (3:5), а насамперед тому, що майбутній фахівець, здобувши вищу освіту, має бути психологічно підготовленим до постійного оновлення і поглиблення своїх знань протягом усього життя, бо інакше він не буде конкурентоспроможним на ринку праці. Стійкі ж навички самостійного навчання найкраще формуються саме в процесі самостійної роботи.

Власне, моделюючи нову навчальну технологію (кредитно-модульну) з урахуванням того, що час на самостійне навчання студентів щороку зростатиме, потрібно передбачити в навчальному алгоритмі, з одного боку, відповідні заходи, які спонукали б студентів до самостійного вибору навчальних дисциплін із взятими зобов'язаннями щодо вчасного їх засвоєння (кредити), а з іншого — максимально допомагати студентам якісно засвоїти навчальний матеріал за мінімальний термін, використовуючи лаконічний виклад найбільш складних елементів знань логічно завершеними частинами (модулями). Не менш важливим є зменшити кількість навчальних предметів на модульних засадах, що ускладнює організацію ефективного їх засвоєння. Зауважимо, це має бути не штучне намагання зменшити кількість навчальних дисциплін, а дидактична інтеграція (поєднання) предметів, які мають спільні змістові лінії.

Враховуючи, що педагогічні інновації — це результат творчого пошуку оригінальних, нестандартних рішень різноманітних педагогічних проблем, вузівський викладач повинен, перш за все, бути поінформованим про новітні технології, усвідомлювати необхідність введення педагогічних інновацій, а також бути готовим до подолання труднощів як змістовного, так і організаційного характеру [3, 5]. З цього аспекту на нашій кафедрі розроблений і успішно реалізується в навчальному процесі курс «Сучасні інноваційні технології у навчанні фізики», розрахований на 81 годину (1,5 кредити), з яких 12 год. — лекційні заняття, 8 год. — лабораторно-практичні, а решта (65 годин) відводиться на самостійну роботу студентів.

З урахуванням вже традиційних підходів, що склалися на кафедрі під час розробки нових спецкурсів і практикумів [2], запропонований нами курс, крім інших вимог, що передбачають ознайомлення студентів з науковими досягненнями в галузі фізики та методики її викладання й посилення ролі активної індивідуальної діяльності кожного студента в розробці конкретних методичних рекомендацій для реалізації їх у практику навчання фізики, обов'язковим є наявність у кожного набору створених нових і апробованих матеріалів у вигляді конспектів уроків, сценаріїв навчально-виховних заходів, інструкцій до лабораторних робіт, креслень і описів саморобних приладів та установок тощо. Аналогічні вимоги висуваються і до результатів самостійної роботи, що в свою чергу дозволяє контролювати та оцінювати якість виконаної роботи, а також сприяє запровадженню опрацьованих розробок під час педагогічної практики та протягом перших кроків самостійної роботи випускника в школі. Таким чином, майбутній фахівець має можливість реалізувати власні доробки, працювати над їх удосконаленням і подальшим розвитком, що неможливо без дослідницької діяльності.

До того ж слід зазначити, що самостійна робота викликає цікавість, якщо завданням притаманна новизна, коли пропонується досліджувати явища і процеси, використовуються нові методи дослідження чи вимірювання фізичних величин тощо. Організація такої роботи передбачає, що вимоги до виконання самостійної роботи мають бути чітко і зрозуміло сформульовані. Тут важливо доцільно співвідносити у навчанні викладання навчального матеріалу вчителем із самостійною роботою учнів. Це вимагає від вчителя професійної майстерності і грамотного планування навчально-виховного процесу [3, 36].

При організації самостійної роботи необхідно подолати існуючі суперечності між становленням особистісної орієнтації навчального процесу та недостатньою підготовленістю викладачів і студентів до виконання нових функцій під час самостійної роботи; необхідністю професійного спрямування навчання та його недостатньою реалізацією у навчанні суспільних дисциплін; збільшенням питомої ваги самостійної роботи в процесі навчання фізико-математичних дисциплін і нерозробленістю відповідних технологій самостійної роботи. Подолання цих суперечностей зумовлює необхідність розв'язання проблеми особистісного та професійного напрямку самостійної роботи студентів технічного навчального закладу в процесі навчання суспільних дисциплін.

Розвиток інтенсивних технологій освіти не тільки сприяє формуванню творчого стилю діяльності майбутнього фахівця, але й суттєво підвищує мотивацію, глибину й повноту оволодіння професією. Серед інноваційних освітніх ресурсів, які активно використовуються майже в кожному вищому навчальному закладі, варто виокремити:

— електронні бібліотеки повнотекстових навчальних матеріалів професорсько-викладацького колективу;

— авторські комп'ютерні програми і системи професійного спрямування;

— електронні навчальні курси (підручники), в тому числі для дистанційного навчання;

— інтерактивні комп'ютерні системи тестування, в яких процес контролю знань є програмною процедурою визначення рівня компетентності студента;

— слайд-лекції, відео-лекції з використанням сучасного обладнання для супроводу.

З метою посилення ролі самостійної роботи студентів — майбутніх вчителів фізики в нашому університеті проводиться робота щодо створення електронних підручників, електронних баз даних у вигляді завдань за тестовими технологіями, що дозволяє студентам в локальних комп'ютерних класах самостійно навчатись та здійснювати самоконтроль.

Одночасно зазначимо, що з метою підвищення значущості самостійної роботи студентів на лекції викладач повинен не лише майстерно донести до студентів навчальну інформацію, а й змусити їх думати. Це можливо лише тоді, коли викладач на лекції висуває проблеми, які необхідно негайно розв'язати. За цих обставин перші ідеї і думки студентів інколи можуть бути невірними, але важливо те, що викладач постійно активізує студентів, а це сприяє розвитку їх мислення, стимулює бажання вчитися. Як правило, на лекції студенти намагаються записати все, що говорить викладач, а це приводить до того, що в навчальному процесі послаблюється чи взагалі випадає етап осмислення основного змісту навчальної інформації. Тут свої переваги виявляють інноваційні засоби навчання. Проте лекція не повинна бути перенасичена різними технічними засобами, їх роль полягає в тому, щоб забезпечити процес активного сприйняття студентами матеріалу лекції та спілкування викладача з аудиторією.

На сьогоднішній день кількість інформації, яку має засвоїти студент, постійно збільшується, а годин, відведених навчальними планами для повного вивчення курсу, не вистачає. Тому у нашому університеті в навчальних планах передбачено збільшення кількості годин на самостійну роботу. Основним аргументом у цьому рішенні виступило твердження, що чим раніше студенти навчаться самостійно працювати, тим більше буде створено умов для опанування ними основ професійної майстерності.

Самостійна робота студентів є спланованою, організаційно і методично спрямованою пізнавальною діяльністю, яка відбувається без прямої допомоги викладача для досягнення конкретної мети, але за його завданням, під його керівництвом, у спеціально відведений для цього час. До того ж самостійна робота з предмета може бути передбачена під час занять та в позанавчальний час.

Самостійна робота передбачає активну розумову чи практичну діяльність, пов'язану з пошуком найбільш раціональних способів виконання запропонованих завдань та з аналізом результатів роботи [1, 35].

Крім того, кредитно-модульна система навчання (КМСН) у педагогічному ВНЗ може передбачати окремо формування індивідуальних завдань як складову модуля самостійної роботи, на яку відводиться значно більше часу.

Тому студенту ми пропонуємо індивідуальні завдання різного обсягу та рівня складності:

— індивідуальне навчально-методичне завдання (ІНМЗ), приклад якого може бути таким: «Використовуючи побутові джерела світла та голографічну дифракційну гратку, дослідити спектральну чутливість ока кожного члена сім'ї і визначити межі такої чутливості», виконавши яке він оформлює звіт, розкриває методичні особливості його виконання та дає пояснення про можливі ускладнення;

— індивідуальне навчально-теоретичне завдання (ІНТЗ), яке передбачає більш глибоке вивчення проблеми з визначенням того, які світлозахисні окуляри доцільно рекомендувати окремим членам сім'ї для наближення їхнього порогового діапазону бачення до середньостатистичного інтервалу для ока;

— індивідуальне навчально-дослідницьке завдання (ІНДЗ), результати якого мають вагоме значення, наприклад, з метою з'ясування можливостей чіткого спостереження предмета в умовах запровадження світлофільтрів, різнокольорового монохроматичного світла чи поляризованого світла і т. п.

Для забезпечення організації самостійної роботи студентів на кафедрі створено навчально-методичні комплекси на електронних носіях, які охоплюють лекції, тематику рефератів, перелік питань для самоперевірки, контрольні роботи, завдання для самостійної роботи. Контроль за цією роботою покладено на систему тестових завдань, які виконує студент протягом року (семестру чи четверті), при цьому накопичуючи бали, за якими буде виставлена підсумкова оцінка з даної дисципліни. Кафедрою підготовлено комплекти завдань з різних навчальних курсів для самопідготовки та самоконтролю з використанням персонального комп'ютера. Ці завдання є складовими до навчально-методичного комплексу, до кожної навчальної дисципліни.

За цих обставин навчальні досягнення студентів оцінюються за чотирма рівнями (початковим, середнім, достатнім і високим) опанування як змістом фізичного матеріалу, так і методикою його викладання. Крім того, критерії оцінювання стосуються рівнів оволодіння теоретичними знаннями, досягненнями при розв'язуванні фізичних задач та при виконанні лабораторних і практичних експериментальних робіт. Здійснюючи самоконтроль, кожний студент має можливість орієнтуватися у власних досягненнях і оцінювати свій рейтинг.

Заміна традиційної системи підготовки майбутнього фахівця з вищою освітою на інноваційну є нагальною потребою часу, що оновлює та модернізує її сутність і структуру, готує учасників навчального процесу до розв'язання проблем завтрашнього дня, визначає як основну мету індивідуальний підхід до кожного студента, враховує його здібності та уподобання, формує готовність майбутнього фахівця до інноваційної діяльності.

Однак запроваджувана КМСН має враховувати і ті здобутки, які має наша вітчизняна освіта і, зокрема, методика навчання фізики. Особливо це стосується процесу підготовки педагогічних кадрів, де не повинна звестися нанівець фундаментальність фізичної освіти, бо саме цей аспект дозволяє майбутньому фахівцю легко включатися у безмежно широку педагогічну діяльність вчителя фізики, а при потребі перебудуватися в нових ситуаціях для ефективної реалізації себе в іншій спорідненій галузі або одержати другу спеціальність; у підготовці майбутнього вчителя не можна обмежуватися лише тестовими завданнями для контролю та оцінки навчальних досягнень студента, бо тут досить важливим аспектом виступає спілкування, вміння вести дискусію, вміння стисло, чітко і зрозуміло висловлювати свою думку. Особливу проблему представляє організація самостійної роботи майбутнього вчителя фізики, бо такі вміння і навички він реалізує під час проведення самостійної роботи учнів як на уроках, так і в позаурочний час. До цих та інших проблем повинна бути звернута увага дослідників при нинішньому вдосконаленні підготовки фахівців з вищою освітою, яке має здійснюватися виважено внаслідок запровадження інших систем і, зокрема, КМСН, але не применшувати наявні вітчизняні досягнення в освітній галузі.

Література

1. *Величко С. П., Слободяник О. В.* Самостійна робота студентів як важливий чинник підготовки високопрофесійного фахівця з вищою освітою // Самостійна робота студентів та її інформаційно-методичне забезпечення: проблеми, досвід, методика: [метод. вісник]. — Кіровоград: РВВ КДПУ, 2009. — Вип. 2. — С. 34–42.

2. *Величко С. П.* Підготовка сучасного вчителя для ефективного викладання фізики // Зб. наук. праць Кам'янець-Подільського держ. ун-ту. Сер. Педагогічні науки. Методологічні принципи формування фізичних знань учнів і професійних якостей майбутніх учителів фізики та астрономії. — Кам'янець-Подільський, ІВВ, 2003. — Вип. 9. — С. 90–93.

3. *Сергієнко Л. Г.* Роль лекції в активізації навчання // Нові технології навчання: Наук.-метод. зб. (спецвипуск). — К.: НМЦ ВО, 2004. — С. 18–21.

4. *Скнарь О.* Модернізація форм і методів навчання студентів у контексті кредитно-модульної системи // Вища школа. — 2006. — № 3. — С. 3–14.

С. П. ВЕЛИЧКО,
доктор пед. наук, професор, завідувач кафедри фізики та методики її викладання Кіровоградського державного педагогічного університету імені В. Винниченка,

О. В. СЛОБОДЯНИК,
старший лаборант кафедри фізики та методики її викладання Кіровоградського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка, пошукувач.

УДК [376.54]:371.3

ЗДІБНОСТІ ДО ФІЗИКИ: СТРУКТУРА, ЗМІСТ, РОЗВИТОК

Розглянуто структуру і зміст здібностей до фізики учнів і студентів. Показано зв'язок між діяльністю та розвитком відповідних здібностей.
Ключові слова: здібності, фізика, молодь, діяльність, розвиток.

Structure and content of students' aptitude for study of Physics are examined. Connection between activities and progress of proper abilities are showed.
Keywords: Aptitude, Physics, students, activities, progress.

Здібності як складні синтетичні властивості особистості визначають її здатність до успішного виконання певної діяльності. Кожна діяльність, залежно від її спрямування, в тій чи іншій мірі потребує певних знань, виконання певних дій, зумовлює наявність певних психічних властивостей, а інколи і фізіологічних якостей індивіда, що необхідні для досягнення успіху (тобто мети, заради якої діяла особистість). Відповідно, саме діяльність визначає основні компоненти здібностей, їх «вагові коефіцієнти» та взаємопов'язаність, тобто структуру здібностей, необхідних для успішного її виконання.

Структуру здібностей у загальному випадку, тобто не обмежуючись конкретним видом або типом діяльності, було ретельно розглянуто Г. С. Костюком [3, с. 17-30]. Ним було виокремлено такі основні компоненти здібностей:

1. Знання як підґрунтя, основа і результат розвитку здібностей, оскільки набуття знань залежить від здібностей, які розвиваються в його процесі.

2. Уміння та навички як узагальнені знання, втілені в діях, які здатен виконувати індивід.

3. Чутливість як психічна і фізіологічна властивість людини, що характеризує здатність до виконання певної діяльності.

4. Спостережливість, тобто здатність швидко виокремлювати головне, помічати істотне серед одноманітного.

5. Пам'ять як здатність до фіксації, збереження і поповнення інформації і результатів попередньої діяльності людини.

6. Уява як здатність до перетворення інформації, створення нових образів (моделей).

7. Мислення (роздумування) — це здатність оперувати наявними знаннями, розширюючи і поглиблюючи їх, робити висновки, створюючи нове знання. Здатність порівнювати, аналізувати, систематизувати, абстрагуватись, узагальнювати тощо. Індивідуальні відмінності інтелектуальної діяльності особистостей найбільше проявляються у здатності мислити, що безпосередньо пов'язано з індивідуальними здібностями людей.

8. Мовлення як зовнішній прояв взаємопов'язаності першої, чуттєвої і другої, мовної сигнальних систем у людини.

9. Працелюбність як мотив і запорука вико-

нання діяльності. Потреба в діяльності спонукає до дій, а діяльність сприяє розвитку здібностей.

10. Зосередженість як здатність абстрагуватись від зовнішніх подразників заради концентрації уваги на розв'язуваній проблемі, тобто здатність цілеспрямовано виконувати певну діяльність, незважаючи на відволікаючі обставини.

11. Наполегливість як здатність до подолання труднощів в процесі діяльності, наявність вольової цілеспрямованості до досягнення мети.

Психологічні аспекти математичних здібностей детально описав В. А. Крутецький [4]. Ним структуровано здібності математично обдарованих дітей. Відповідно, оскільки вивчення фізики на сучасному етапі неможливе без широкого застосування математичних знань, перш за все як апарату, методу здобуття фізичних знань — здібності до вивчення фізики, а відтак і поняття обдарованості по відношенню до заняття фізичною наукою значною мірою визначається з урахуванням поняття математичних здібностей молодої людини. Зрозуміло, що здібності до вивчення певної науки і здібності до розвитку і збагачення цієї науки в подальшому — це не одне й те ж саме, але компоненти здібностей, потрібних для того, щоб цілеспрямовано займатися наукою, здійснювати наукові дослідження починають формуватися в процесі навчання, тобто, опановуючи основи науки, молоді люди формують, структурують, розвивають свої здібності до відповідної науки.

Зміст фізики як науки полягає у вивченні найбільш простих і, разом з тим, найбільш загальних закономірностей явищ природи, властивостей і будови матерії і законів її руху. Тобто фізика вивчає реальні процеси та явища, і її розвиток нерозривно пов'язаний з проведенням експериментальних досліджень, що зумовлює ряд суттєвих складових у структурі здібностей до вивчення фізики. Разом з тим, прагнучи виокремити найбільш загальні та характерні складові здібностей до фізики, ми не розглядали окремі характеристики здібностей, які можливо притаманні обдарованим особистостям, схильним до вивчення та заняття окремими галузями фізики або суміжними науками (біофізикою, астрофізикою геофізикою, метафізикою тощо).

Загалом, структура здібностей до фізики досить подібна до структури здібностей математично обдарованих дітей, запропонованої В. А. Крутецьким. Ґрунтуючись на його дослідженнях, ми виокремили п'ять компонентів у структурі здібностей до фізики:

I. Отримання інформації.

II. Обробка і перетворення інформації.

III. Збереження інформації.

IV. Узагальнення інформації, здійснення висновків.

V. Практичне втілення і застосування набутих знань.

I. Процес отримання інформації має чотири аспекти.

А. Здатність до формалізації набутої інформації, «охоплення» формальної структури проблеми, тобто виокремлення головних понять і співвідношень, які визначають суть фізичної задачі (проблеми) і, відповідно, дозволяють здійснювати класифікацію, визначати тип задачі. Як свідчить досвід, за однакових умов молоді люди здатні до формалізації набутої інформації, активніше опрацьовують умови задач і отримують значно більшу кількість інформації, ніж менш здібні ровесники. Здібності до формалізованого сприйняття інформації тісно пов'язані з умінням аналізувати умову задачі, спершу орієнтуватися у відповідній проблематиці.

Б. Здатність сприймати процес або явище в цілому, не втрачаючи його цілісності та взаємопов'язаності; не зважаючи на різноманітність аспектів, не втрачати цілісність проблеми. Здібних учнів вирізняє здатність до швидкого попереднього орієнтування в проблемі, що передує розв'язанню задачі і забезпечується аналітико-синтетичним осмисленням її змісту.

Сприймаючи задачу, охоплюючи її структуру, здібні учні систематизують її дані, чітко диференціюючи три якісно різних елементи:

• Вирізняють показники, характеристики суттєві для розв'язання даної задачі. Здібні учні перш за все виокремлюють ознаки і характеристики, що визначають фізичний зміст відповідного процесу або явища. У цьому розумінні найбільш показовими є приклади виокремлення обдарованими молодими людьми комплексу основних показників (характеристик) у структурі конкретної задачі, що дозволяє розв'язувати «задачі без запитань» або «задачі з неповними даними». Тобто у випадках, коли в задачах відсутній один з обов'язкових елементів комплексу величин, що знаходяться у функціональній залежності, здібні учні здатні чітко сформулювати відповідне питання або вказати, яких саме даних не вистачає в умові задачі. Зрозуміло, що виконати зазначені дії можна лише усвідомивши весь комплекс елементів, складових проблеми (задачі). Відповідно це означає, що обдаровані діти здатні сприймати проблему в цілому, відразу встановлюючи функціональні залежності між величинами, які є суттєвими.

• Фізичні величини, які є несуттєвими для розв'язання даного типу задачі в принципі, але є суттєвими для певних конкретних умов або окремого варіанта задачі. Наприклад, загальний розв'язок задачі з механіки, яка передбачає складання та розв'язання відповідного основного рівняння динаміки, може мати окремі часткові випадки залежно від початкових умов руху тіл тощо.

• Фізичні величини, числові дані, параметри, іншу інформацію, що є несуттєвими і ніяк не впливають на розв'язання задачі, а є лише оболонкою, «обгорткою» фізичної проблеми. Кожен з трьох перелічених елементів відіграє важливу роль для розв'язання задачі. Перша група показників вирізняє задачі (проблеми) одного типу, дозволяє відрізняти їх від інших типів задач і зумовлює подальший спосіб дії щодо їх розв'язання. Друга група величин відрізняє конкретну задачу даного типу від інших задач того ж типу і зумовлює певні дії щодо знаходження конкретного розв'язку. Значення третьої групи величин полягає в необхідності вміння оцінювати вагомість наданої інформації і виокремлення із загальної маси фізичних величин лише суттєвих для розв'язання задачі.

Таким чином, особи, які мають здібності до фізики (як, до речі, і до математики), створюють у своїй свідомості цілісно-розчленований образ задачі (проблеми), що власне і визначає здатність «схоплювати», сприймати задачу в цілому.

В. Спостережливість, здатність бачити окремі фізичні процеси як складові фізичного явища та фізичне явище як результат суперпозиції багатьох процесів. Фактично мова йде про адекватне сприйняття фізичної суті, змісту явищ та окремих процесів. Наприклад, дощ можна розглядати не лише як метеорологічне явище, а вивчаючи дощ з фізичної точки зору можна говорити про процеси конденсації і випаровування, нагрівання, охолодження і, відповідно, теплообміну; можна досліджувати падіння крапель, вивчати дію сил поверхневого натягу, утворення бульбашок на калюжах, вимірювати силу вітру та визначати його напрям, наочно знайомитися з поняттями вологості повітря, гігроскопічністю різних матеріалів та речовин, вивчати оптичні ефекти тощо.

Г. Здатність до розумового орієнтування, швидкість міркування. Швидкість, з якою обдаровані молоді люди, що мають здібності до фізики, сприймають відповідні задачі (проблеми), дозволяє говорити не про послідовний аналітико-синтетичний процес сприйняття структури і змісту задачі, а про так зване аналітико-синтетичне «бачення» проблеми, оскільки відповідна аналітико-синтетична діяльність відбувається начебто одномоментно. Однак, як свідчать дослідження Л. С. Виготського, В. А. Крутецького та інших учених, висока швидкість мислення обдарованих молодих людей не означає безпосереднє «бачення» ними певних взаємозв'язків, співвідношень відповідного матеріалу, або ж нехтування, перескакування через деякі логічні етапи. Швидке розумове орієнтування обдарованих учнів пов'язане з дуже напруженою, строго логічною і послідовною, високоефективною розумовою діяльністю.

Ще одним аспектом розумового орієнтування осіб, здібних до фізики, є визначення напрямку та порядку дій щодо розв'язування поставленої задачі. Аналітико-синтетична первинна зорієнтованість обдарованих учнів спрямована на виокремлення ознак, що визначають план дій щодо розв'язання задач відповідного типу. Таку схему розумових дій пояснюють фактом існування двох рівнів аналізу, встановлених польським фізіологом Ю. Конорським. На його думку, перший рівень дає змогу розрізняти, диференціювати подразники, але не визначає поведінку. Другий рівень дає людині змогу діяти.

II. У процесі **обробки і перетворення інформації**, як структурній складовій здібностей молодих людей до фізики, нами виокремлено вісім аспектів.

А. Здатність до швидкого і широкого узагальнення набутої фізичної інформації, зокрема, експериментальних даних. Здатність до узагальнення може бути реалізована двома способами: по-перше, як спроможність людини побачити в окремому конкретному прояві вже відому загальну закономірність, тобто долучення окремого випадку до загального поняття — узагальнення на рівні систематизації відомих результатів; по-друге, як спроможність побачити в поодиноких окремих результатах загальну невідому (об'єктивно або суб'єктивно) нову залежність, закономірність тощо — узагальнення на рівні здійснення нового загального висновку на підставі окремих результатів.

Ефективність процесу узагальнення характеризують швидкістю його здійснення, що за В. А. Крутецьким визначається кількістю необхідних конкретних результатів, факторів, випадків тощо, на підставі яких особою здійснюється узагальнюючий висновок [4, 261]. Обдаровані, здібні до фізики молоді люди, учні досить легко і швидко знаходять загальне, приховане за різними деталями, глибоко розкривають фізичний зміст явищ, не зважаючи на різноманітність зовнішнього оформлення задач, за власною ініціативою здійснюють порівняння і навіть порівняльний аналіз нового та знаного раніше. Вже на етапі ознайомлення з умовою задачі відбувається попередній аналіз, а фактично типологізація задач, визначаються відмінності на спільні частини задач, що дозволяє легко перенести відомі загальні способи розв'язування одних задач (або їх частин) на розв'язування інших (за можливістю).

Характерною особливістю більшості обдарованих особистостей є прагнення розв'язувати конкретну фізичну задачу як загальну типову задачу. Для цього визначається загальний план, будується математична модель відповідного процесу тощо, здійснюється абстрагування від форми постановки задачі, конкретних фізичних величин, даних задачі. Зазначена особливість обдарованих особистостей, як свідчить досвід, загострюється та розвивається з віком, цим людям притаманне прагнення до узагальнення методів розв'язання, принципів підходу до розв'язання фізичних проблем. Не заперечуючи корисність та ефективність прагнення до розв'язування фізичних задач у загальному вигляді, водночас відзначимо існування деяких досить суттєвих недоліків такого підходу. По-перше, абстрагування від конкретних даних задач, значень величин, параметрів практично без застережень може бути застосовано при розв'язанні задач із суто математичної точки зору, але розв'язання задач з фізики, що мають фізичний зміст, який і визначає межі застосованості математичних моделей, досить часто потребує конкретного, а не загального розв'язання, оскільки загального розв'язання можливо не існує взагалі, а конкретне розв'язання диктується саме значеннями фізичних величин або їх співвідношеннями, заданими в умові задачі. По-друге, прагнення до пошуку розв'язання в загальному вигляді, прагнення до узагальнення шляхом типологізації, класифікації неминуче наражається на протиріччя з творчою діяльністю, яка не зв'язана прив'язуванням до існуючих стандартів, типів або усталених методів. Інтелект формується за рахунок засвоєння знань, що дає змогу пристосуватися до оточуючого середовища — в даному випадку мова йде про розв'язання задачі шляхом її розчленування, типологізації, віднайдення потрібних методів. Але якщо виникає потреба розв'язання нестандартної, нетипової задачі на основі відомих фізичних законів і принципів, то метод узагальнення вже не спрацьовує, не дає результату. Нестандартне творче розв'язання передбачає перетворення середовища (тобто знання), а не адаптацію до нього [2, 16—17]. Відповідно, маючи на увазі здібності до розв'язання нестандартних, нетипових, творчих фізичних задач, на наш погляд, важливе значення має здатність виокремлювати головне, істотне з фізичної точки зору для розв'язання задачі.

Б. Здатність виокремлювати фізичний зміст відповідного процесу або явища, тобто диференціювати, розрізняти домінуючі та другорядні фактори (процеси). Зазначена властивість індивіда разом із здатністю до формалізації набутої інформації, «схоплювання» формальної структури проблеми (п. 1, А) забезпечує індивіду можливість побудови математичної моделі відповідного фізичного явища або процесу, що надзвичайно важливо з точки зору забезпечення прикладного характеру фізичних знань. Адже знання, які не втілюються в життя, не приносять користі.

В. Обдарованим особистостям, здібним до фізики, притаманна здатність швидко скорочувати, «згортати» міркування щодо розв'язання поставлених задач, поступового «випадання» окремих ланок у ланцюжку міркувань, яким, власне, пояснюється процес «згортання», на що вперше звернув увагу Л. С. Виготський. Досліджуючи розумову діяльність школярів, П. А. Шевар'єв, а згодом Н. О. Менчинська, встановили, що в процесі розв'язання задач обдаровані учні здійснюють згорнуті умовиводи, причому сама особа не усвідомлює механізмів, правил або алгоритмів, відповідно до яких вона діє. Важливим є те, що результат міркувань обдарованої особистості, здобутий з використанням «згортання» частини операцій розумової діяльності, жодним чином не погіршується, але здобувається значно швидше, ніж при послідовному виконанні всіх етапів розгорнутих міркувань. Отже згорнуті міркування є послідовними, структурованими логічними судженнями з повноцінною аргументацією.

Безумовно, згортання процесу міркувань залежить від структури, складності та оригінальності задачі. Також існує точка зору, що «згортання» міркувань залежить від ступеня натренованості учня на виконання певних розумових операцій або розв'язання задач певного типу. Дослідники (Л. П. Долбаєв, Н. К. Індик, О. М. Соколов, Н. Ф. Тализіна, В. П. Ярощук) процесів мислення відзначали, що «згортання» міркувань — це поступовий процес, який формується виконанням істотного числа однотипних вправ. Але в результаті таких тренувань «згортання» міркувань здійснюється лише у досить вузькому секторі питань та типів задач, для розв'язання яких потрібна досить чітко визначена послідовність розумових дій.

Як свідчить досвід наших досліджень і практика роботи з обдарованими молодими людьми, процес «згортання» міркування в них відбувається досить радикально відразу після ознайомлення з умовою принципово невідомої задачі. Дослідження В. А. Крутецького [4, 298] свідчать, що «згортання» процесу міркувань обдарованої особистості починається відразу після узагальнення знайденого способу розв'язання. Але процес усвідомлення проблеми (задачі) і узагальнення способу розв'язання також відбуваються «згорнуто», а отже швидко, практично миттєво після ознайомлення з проблемою у свідомості здібного до фізики учня починається процес «згортання» міркувань щодо розв'язання задачі по суті, що також відбувається досить швидко. Цим, зокрема, пояснюється, наприклад, швидка селекція задач (із запропонованого списку) за оригінальністю, рівнем складності та ряд додаткових уточнюючих запитань щодо змісту задач, які ставлять здібні до фізики учні відразу після ознайомлення із задачами. Наявність згорнутого мислення не означає порушення логіки або послідовності операцій розумової діяльності. Деякі необхідні етапи процесу мислення обдарована особистість виконує підсвідомо, неявно, скорочено і дуже швидко, але при потребі особа може свідомо розгорнути, аргументувати і пояснити зміст усіх етапів повної структури процесу мислення.

Згортання, тобто скорочення проміжних ланок міркувань аж до їх повного випадання, яскраво свідчать про наявність особливих здібностей особистості, причому важливим є підсвідомий характер згортання міркувань, а також те, що здатність до зазначеного «згортання» виявляється в процесі розв'язання нових, раніше невідомих учню, типів задач, тобто здатність не набувається тренуванням або застосуванням спеціальних алгоритмів.

Саме згортання міркувань в процесі розв'язання фізичних задач, на наш погляд, має бути одним з критеріїв визначення обдарованості, наявності особливих здібностей до фізики.

Г. Обдарованих і здібних до фізики молодих людей вирізняє здатність до характерного «обмеженого абстрагування», тобто процес абстрагування здійснюється, але лише в межах, що дозволяють не втратити фізичний зміст проблеми, яка розглядається. Здатність до логічного мислення, прагнення до усвідомлення фізичного змісту досліджуваних процесів і явищ відображається, зокрема, в тому, що не зважаючи на «згортання» певних розумових операцій, обдаровані і здібні до фізики молоді люди здатні, за потреби, обґрунтувати всі етапи здійснюваного ними розв'язання, а також пояснити їх фізичний зміст і межі застосування використаних співвідношень і закономірностей, орієнтуючись, наприклад, на порядок фізичних величин, що характеризують відповідні процеси, явища, які розглядаються в задачі.

Широко відомим є прагнення математично обдарованих особистостей до раціональності, до пошуку оптимального шляху розв'язання задачі. Зазвичай математично обдаровані діти не задовольняються просто розв'язанням задачі і отриманням відповіді. Відчуваючи, що розв'язання може бути спрощене, математично обдарована молода людина обов'язково починає пошук оптимального шляху до розв'язку. Як свідчать результати наших досліджень та досвід практичної роботи, обдаровані молоді люди, які мають здібності до фізики, загалом не відрізняються прагненням до пошуку простого або спрощеного розв'язання як оптимального шляху до вирішення фізичної проблеми. Звичайно, якщо мова йде про розв'язання більш-менш стандартної фізичної задачі із заздалегідь визначеною за умовою математичною моделлю фізичних процесів, то цілком коректно і доцільно вести мову про оптимальне, раціональне розв'язання (по суті — математичне розв'язання) фізичної задачі. Але якщо говорити про фізичні задачі (проблеми), пов'язані з розглядом реальних явищ природи, які поєднані з перебігом багатьох фізичних процесів, то поняття простоти (спрощення), пошуку короткого шляху до розв'язання (пояснення) проблеми з фізичної точки зору завжди тісно пов'язані з глибиною і повнотою розв'язку. Фізика як наука про природу, як наука експериментальна, описує всі явища і процеси з тією або іншою точністю, свідомо нехтуючи деякими чинниками, важливість і значущість яких істотно змінюється залежно від умов і мети дослідження. Тому для осіб, що заглиблюються у зміст фізичних процесів, особливо під час експериментальних фізичних досліджень, поняття простоти, оптимальності і раціональності є відносними.

Д. Варіативність або гнучкість мислення істотно відрізняє осіб, що мають здібності до фізики і математики. Термін «гнучкість мислення» вперше був застосований Н. О. Менчинською [5] в значенні вміння особистості швидко переключати розумову діяльність з однієї розумової операції на іншу. Н. О. Менчинською було помічено, що учням з гіршими розумовими здібностями притаманне домінування розумових операцій, нав'язаних останнім, за часом, досвідом практичної розумової діяльності. У процесі актуалізації правильних методів розв'язання задачі зазначене домінування на практиці гальмує пошук розв'язку, наочно демонструючи недостатню гнучкість мислення учня, причому чим гірші здібності до фізики та математики має учень, тим істотнішим є процес гальмування.

Д. М. Богоявленським та Н. О. Менчинською було виокремлено три основних показники гнучкості мислення: 1) доцільне варіювання способів дії; 2) легкість перебудови знань і навичок та їх систем у відповідності до змінених умов; 3) легке переключення з одного способу дії на інший [1]. Як свідчать дослідження, здібності до фізики безпосередньо залежать від гнучкості мислення. Молодих людей, що мають здібності до фізики, відрізняє легкість переходу до нового способу дії, швидка зміна розумових операцій, а також різноманітність підходів до розв'язання задачі.

Е. Здатність і спрямованість розумової діяльності на оцінювання розв'язку проблеми (задачі) з фізичної точки зору.

Обдаровані і здібні до фізики молоді люди, як правило, активно і наполегливо розв'язують фізичну задачу до моменту з'ясування фізичного змісту остаточного розв'язку — визначення характеру залежності, що описує кінцевий результат (характер руху тіла, фазовий перехід, характер взаємодії, домінуючий процес тощо), не дуже цікавлячись конкретним розв'язком. Такі учні, як правило, ідею розв'язку знаходять значно швидше, ніж їх ровесники, швидко розв'язують задачу у фізичному аспекті і, якщо з'ясовується, що порядок фізичних величин зрозумілий і не впливає на трактування відповіді з фізичної точки зору, то, як свідчить досвід наших досліджень, інтерес до подальшої «технічної» роботи, пов'язаної з обчисленнями і отриманням остаточної відповіді, істотно знижується.

Ж. Водночас більшість молодих людей, що мають здібності до фізики, відрізняє вміння спостерігати, здатність до «поєднання реального з ідеальним», тобто, використовуючи, за образним висловом Василя Сухомлинського [6], «розум на кінчиках пальців», перетворювати експериментальні результати досліджень у теоретичні висновки і навпаки. Причому досить копітка робота щодо збирання та обробки результатів спостережень і фізичних досліджень не сприймається такими учнями як «технічна», обтяжлива, вимушена або нецікава. Здатність обдарованих і здібних до фізики учнів і студентів отримувати задоволення від планування, здійснення фізичного експерименту та обробки його результатів дуже схожа на те, як математично обдаровані молоді люди насолоджуються пошуком оптимального, найбільш раціонального розв'язання математичної задачі.

Як свідчить досвід наших досліджень, обдаровані учні та студенти, які займались фізикою, але яким бракувало «розуму на кінчиках пальців», прагнули до теоретичних досліджень, мали явно виражені математичні здібності, розв'язуючи фізичні проблеми, по суті, розглядали лише їх математичний аспект і не досягали змістовних, цікавих з фізичної точки зору результатів.

3. Оберненість розумових процесів, характерна для обдарованих і здібних до фізики та математично обдарованих молодих людей, полягає, як вважає В. А. Крутецький [4, 316], у швидкій та легкій перебудові спрямованості ходу думок з прямого напрямку на зворотній.

Фактично мова йде про два різних, але взаємопов'язаних, процеси. По-перше, оберненість розумового процесу означає встановлення у свідомості обдарованої особистості двосторонніх (обернених) зв'язків (асоціацій), на відміну від односторонніх зв'язків, здатних функціонувати лише в одному напрямку; по-друге, оберненість розумового процесу в плані міркувань означає зворотнє спрямування думок від результату до вихідних даних.

При вивченні фізики складність переходу від прямої до оберненої задачі має два аспекти — суто фізичний (змістовий) і психологічний.

В ході розгляду фізичних процесів та розв'язування фізичних задач важливим є те, що зворотній хід думок не завжди містить кроки або етапи логіки розв'язання прямої задачі, отже, оберненість розумового процесу потребує особливих здібностей. Наприклад, пряма задача щодо побудови траєкторії руху тіла за відомим рівнянням руху і обернена — написання рівня руху тіла за відомою траєкторією, взагалі, є різними як за рівнем складності, так і за етапами розв'язання; здійснення експериментального дослідження з подальшим теоретичним поясненням (обґрунтуванням) одержаних результатів за логікою суттєво відрізняється від задачі на побудову теоретичної моделі певного процесу та її експериментальної перевірки; істотно ускладнюється процес розгляду прямих і обернених задач (досліджувальних процесів) за наявності гістерезису.

З психологічної точки зору здібності до переключення з прямої задачі на обернену дослідники (В. А. Крутецький, Н. О. Менчинська, Є. М. Кабанова-Меллер) пов'язують з гнучкістю мислення. Інертність мислення, що визначає мету відповідно до вихідних даних, перешкоджає швидкому розв'язанню оберненої задачі.

Як свідчить досвід і результати досліджень, саме гнучкість мислення, притаманна обдарованим молодим людям, дозволяє їм долати труднощі в обох аспектах, успішно розв'язуючи як прямі, так і обернені задачі без спеціальної підготовки, засвоєння спеціальних методів або прийомів такої розумової діяльності, оскільки зв'язки, що встановлюються у свідомості обдарованих учнів, відразу набувають оберненого характеру, а формування прямих асоціацій супроводжується формуванням зворотних.

III. Збереження інформації молодими людьми, здібних до фізики, на наш погляд, має два аспекти.

А. Здатність до швидкого і міцного запам'ятовування інформації, що містить фізичний зміст. Характерною рисою такого запам'ятовування є те, що в пам'яті молодої людини закарбовується не конкретне значення фізичної величини, а її порядок, тобто суттєва, з точки зору фізики, інформація про те, як дана величина співвідноситься з іншими характеристичними фізичними величинами, константами. Також здібні до фізики учні і студенти здатні довго зберігати в пам'яті характеристичні ознаки та параметри досліджуваних процесів і явищ, узагальнені способи розв'язання фізичних задач та правила проведення фізичних досліджень. Водночас, як свідчать дослідження, конкретний цифровий матеріал або інформація, що не мають чіткого фізичного змісту або не пов'язані логікою перебігу фізичних процесів, запам'ятовуються здібними до фізики молодими людьми не найкращим чином.

Б. Здатність до тривалого заняття фізикою, наполегливість, працездатність. Зазначені ознаки є фактично інваріантними для переважної більшості людських здібностей, водночас, беручи до уваги експериментальний характер фізичної науки, наполегливість і витривалість дослідників (починаючи з навчальних шкільних, лабораторних експериментів) має надзвичайно велике значення, оскільки дослідження реальних процесів і явищ матеріального світу, збір, опрацювання і збереження набутої інформації пов'язані з багатьма труднощами.

IV. Узагальнення інформації, здійснення висновків.

Для обдарованих та здібних до фізики молодих людей характерними є прагнення шукати і знаходити закономірності в процесах і явищах оточуючого світу, встановлювати логіку функціональних залежностей фізичних величин, аналізувати, узагальнювати отриману інформацію, робити обґрунтовані висновки.

Окремо зазначимо, що вивчення фізики, проведення фізичних досліджень, розв'язування задач (проблем) зазвичай пов'язані зі здійсненням припущень, передбачень, висуванням науково обґрунтованих гіпотез, основою для яких є аналіз і узагальнення вихідних даних задачі (проблеми), визначення домінуючих та другорядних процесів і взаємодії. Тобто гіпотеза як ідея, що визначає напрямок дослідження і шлях розв'язання фізичної задачі, також є результатом певного узагальнення, своєрідним «проектом висновку» або «попереднім висновком», що відображає фізичний зміст проблеми, але потребує перевірки і підтвердження. Відповідно молодим людям, здібним до фізики, притаманна здатність висувати науково обґрунтовані фізичні гіпотези і припущення.

V. Практичне втілення, застосування набутих знань.

А. Здібним до фізики учням і студентам притаманне прагнення до пізнання дійсності як засіб пошуку шляхів її перетворення.

Б. Здібним до фізики молодим людям притаманна специфічна спостережливість, спрямована на розкриття суті явищ і процесів у природі, що відкриває шлях до їх практичного застосування.

В. Специфічне мислення здібних до фізики молодих людей відзначається стійкою спрямованістю на розкриття принципів дії існуючих довкола механізмів, усвідомлення закономірностей функціонування оточуючого матеріального світу з метою його перетворення та практичного застосування набутих знань.

Г. Уява обдарованих молодих людей сприяє створенню образів нового — принципових ідей, науково обґрунтованих гіпотез, конструкторських рішень.

Д. Здібним до фізики молодим людям притаманна схильність до творчого вирішення фізичних і технічних проблем. Характерною їх рисою є постійне прагнення до створення нового шляхом відходу від алгоритму, тобто нового не лише за формою, змістом, але й за методом побудови. Мова йде як про створення нового (або суб'єктивно нового) теоретичного знання, так і про створення (конструювання, проектування) нових механізмів і пристроїв.

Е. Обдарованих і здібних до фізики учнів і студентів відзначає здатність до здійснення фізичних експериментів, ведення дослідницької діяльності. Загалом, молоді люди здатні планувати дослідження, формулювати його проблему та завдання, проектувати і конструювати лабораторну установку, проводити вимірювання, обробляти їх результати, аналізувати і робити висновки.

Запропонована структура здібностей обдарованих і здібних до фізики молодих людей є досить схематичною і може уточнюватись залежно від специфіки діяльності, спеціалізації щодо заняття фізикою, їх віку, особистих схильностей і задатків. Але запорукою розвитку здібностей до фізики у будь-якому випадку залишається діяльність кожної обдарованої особистості щодо вивчення фізики та розвитку наукових знань.

Література

1. *Богоявленский Д. Н., Менчинская Н. А.* Психология усвоения знаний в школе. — М.: Изд-во АПН РСФСР, 1959. — С. 187.

2. *Давиденко А. А.* Методика розвитку творчих здібностей учнів у процесі навчання фізики (теоретичні основи). — Ніжин: Аспект-Поліграф, 2004. — 264 с.

3. *Костюк Г. С.* Здібності та їх розвиток у дітей. — К.: Знання, 1963. — 80 с.

4. *Крутецкий В. А.* Психология математических способностей школьников. — М.: Просвещение, 1968. — 431 с.

5. *Менчинская Н. А.* Интеллектуальная деятельность при решении арифметических задач // Известия АПН РСФСР, 1946. — Вып. 3. — С. 124.

6. *Сухомлинський В. О.* Людина неповторна // Вибрані твори. — К., 1977. — Т. 5. — С. 82–89.

Б. Г. КРЕМІНСЬКИЙ,
канд. пед. наук, докторант Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова, старший науковий співробітник Інституту інноваційних технологій і змісту освіти Міністерства освіти і науки України, доцент, заслужений вчитель України.

УДК [373.3:510.2+510.2](075.2)

ПРО РЕЗУЛЬТАТИ УЧАСТІ ШКОЛЯРІВ УКРАЇНИ У МІЖНАРОДНОМУ ПОРІВНЯЛЬНОМУ ДОСЛІДЖЕННІ ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ TIMSS—2007

Статтю присвячено результатам участі школярів України у Міжнародному порівняльному дослідженні природничо-математичної освіти TIMSS-2007. Розглядаються організаційні засади проведення Міжнародного моніторингового дослідження в Україні. Наведено порівняльні дані навчальних досягнень учнів 4-х і 8-х класів з математики та природничих предметів країн-учасниць Міжнародного дослідження.

The article is about analysis of participation of Ukrainian students in of international monitoring research TIMSS-2007. Some organizational principles are highlighted. Comparative date of educational achievements of students of 4 and 8 grades of mathematics and science another country-participants.

Міжнародне моніторингове дослідження TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study) проводиться Міжнародною асоціацією вимірювань навчальних досягнень IEA (The International Association for the Evaluation of Educational Achievement) з метою порівняння рівня навченості учнів 4-х і 8-х класів з математики та природничих предметів. Це дослідження було започатковано у 1995 році та має чотирирічний термін періодичності. Результати дослідження TIMSS дають можливість країнам-учасницям виявити загальносвітові тенденції математичної та природничої загальної середньої освіти, порівняти навчальні досягнення учнів у динаміці та між однолітками різних країн, визначити фактори, які впливають на якість навчально-виховного процесу, з'ясувати подальші кроки з метою удосконалення якості навчання.

У дослідженні TIMSS—2007 взяли участь 425 тис. учнів з 62 країн світу. У 2007 році українські школярі вперше стали учасниками цього міжнародного порівняльного дослідження. Спільними зусиллями Міністерства освіти і науки України, Академії педагогічних наук України, Центру тестових технологій та моніторингу якості освіти Міжнародного фонду «Відродження» та за фінансової підтримки проекту Світового банку «Рівний доступ до якісної освіти в Україні» в Україні було проведено дослідження TIMSS.

Для участі в дослідженні Міжнародним оргкомітетом було відібрано 149 загальноосвітніх навчальних закладів з усіх регіонів нашої країни, серед яких 59% міських шкіл. До цієї вибірки було включено 3 спеціалізовані навчальні заклади (ліцеї, гімназії), серед них лише один заклад фізико-математичного профілю. Загалом у дослідженні взяли участь 4498 учнів 4-х та 4527 учнів 8-х класів.

На розв'язування завдань в 4-х класах відводилося 72 хвилини, а у 8-х — 90 хвилин. Учні виконували завдання в два етапи, між якими була перерва. Після завершення тестування було проведено анкетування.

Учні заповнювали анкети, де надавали відомості про власну родину, умови навчання вдома, ставлення до навчальних предметів, особливості проведення уроків тощо. Вчителям пропонувалися анкети, до яких входили запитання щодо професійної підготовки та особливостей викладання предметів. Директори загальноосвітніх навчальних закладів відповідали на запитання щодо забезпечення навчально-виховного процесу, особливостей своїх загальноосвітніх навчальних закладів. Аналіз даних цих анкет дав можливість виявити найбільш важливі фактори, що впливають на успішність навчання з природничо-математичних предметів.

З метою виявлення рівня навчальних досягнень учням 4-х і 8-х класів пропонувалося 14 варіантів тестових зошитів, кожний з яких було розділено на 2 частини: математика та природничі предмети. Так, чотирикласникам пропонувалося по 21—26 завдань з математики та 22—28 — з природознавства. Учні 8-х класів відповідали на 33—37 запитань з математики та 32—37 — з предметів природничого циклу. Завдання були різних типів: закритого типу з вибором однієї правильної відповіді, відкриті завдання з короткою та розгорнутою відповіддю.

Для забезпечення можливості відслідковування результатів навченості в динаміці до тестових зошитів було включено 8 блоків завдань з кожного напрямку (математики та природознавства), які слугували інструментарієм і в 1999 та 2003 роках.

З метою порівняння навчальних досягнень учнів різних країн Міжнародним оргкомітетом було встановлено середній показник — 500 балів. Так, найвищі результати з математики серед 4-х класів показали учні Гонконгу (607 балів) та Сінгапуру (599), Тайбею (Китай) (576) та Японії (568), а 8-х класів — Тайбею (Китай) (598 балів), Південної Кореї (597), Сінгапуру (593), Гонконгу (572). Ці країни Сходу також є у десятці лідерів і з природознавства. Наприклад, максимальний результат з природознавства набрали школярі Сінгапуру: 587 балів — чотирикласники та 567 — восьмикласники. У табл. 1 наведено результати українських школярів та кількість країн, що мають вищий (нижчий) середній бал.

Як видно з таблиці, результати наших учнів як 4-х, так і 8-х класів з математики і природ-

Таблиця 1

	4-й клас		8-й клас	
	Математика	Природознавство	Математика	Природознавство
Середній бал України	**469**	**474**	**462**	**485**
Кількість країн, що мають вищий за середній міжнародний бал	21	23	15	16
Кількість країн, що мають нижчий за середній міжнародний бал	15	13	35	33
Кількість країн, що мають вищий за Україну середній бал	25	25	24	18
Кількість країн, що мають нижчий за Україну середній бал	10	10	24	30

ничих дисциплін дещо нижче встановленого середнього міжнародного рівня. Українські школярі, які брали участь у дослідженні, показали співвідносні результати з однолітками Норвегії, Вірменії, Грузії.

Таблиця 2

Результати країн-учасниць Міжнародного моніторингового дослідження TIMSS (вибірка) з математики

4-й клас		8-й клас	
Країна	Кількість балів	Країна	Кількість балів
Гонконг	607	Тайбей (Китай)	598
Сінгапур	599	Корейська республіка	597
Тайбей (Китай)	576	Сінгапур	593
Японія	568	Гонконг	572
Казахстан	549	Японія	570
Росія	544	Угорщина	517
Великобританія	541	Великобританія	513
Латвія	537	Росія	512
Нідерланди	535	США	508
Словенія	502	Словенія	501
Середній міжнародний бал – 500			
Чехія	486	Швеція	491
Норвегія	473	Норвегія	469
Україна	**469**	Болгарія	464
Грузія	438	Ізраїль	463
Іран	402	**Україна**	**462**
Туніс	327	Румунія	461
Ємен	234	Таїланд	441
		Туреччина	432
		Іран	403
		Палестина	367
		Гана	309

У дослідженні TIMSS було виокремлено чотири рівні підготовки учасників:

— найвищий — 625 балів та вище;
— високий — 550-624 бали;
— середній рівень — 475-549 балів;
— низький рівень — 400-474 бали.

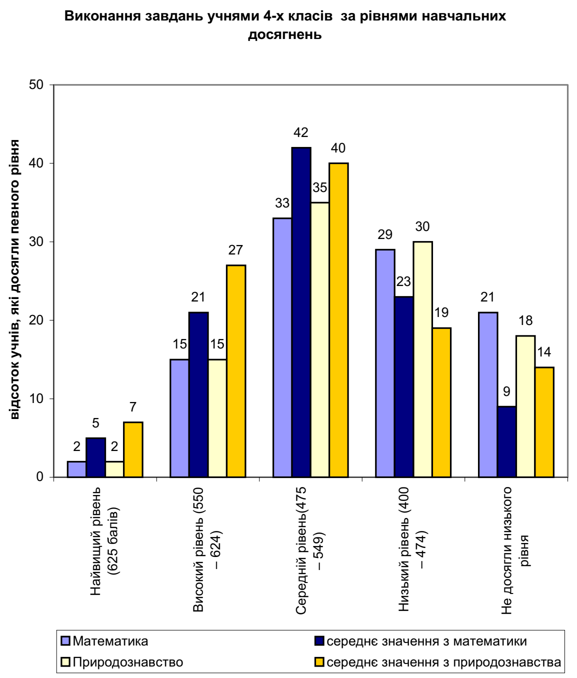
Як правило, країни з найкращими середніми результатами мають більший відсоток учнів, які досягли вищих рівнів підготовки. Розподіл результатів, отриманих українськими учнями з математики та природознавства, відрізняється

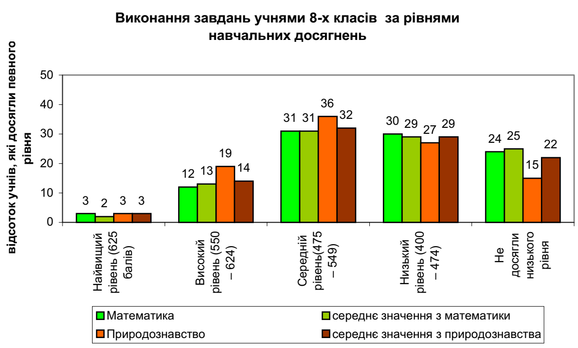
Таблиця 3

Результати країн-учасниць Міжнародного моніторингового дослідження TIMSS (вибірка) з природничих предметів

4-й клас		8-й клас	
Країна	Кількість балів	Країна	Кількість балів
Сінгапур	587	Сінгапур	567
Тайбей (Китай)	557	Тайбей (Китай)	561
Гонконг	554	Японія	554
Японія	548	Корейська республіка	553
Росія	546	Великобританія	542
Великобританія	542	Угорщина	539
Латвія	542	Чехія	539
США	539	Словенія	538
Швеція	525	Швеція	511
Середній міжнародний бал – 500			
Норвегія	477	Норвегія	487
Україна	**474**	**Україна**	**485**
Іран 436	436	Йорданія	482
Грузія	418	Таїланд	471
Колумбія	400	Болгарія	470
Марокко	297	Румунія	462
Ємен	197	Гана	303

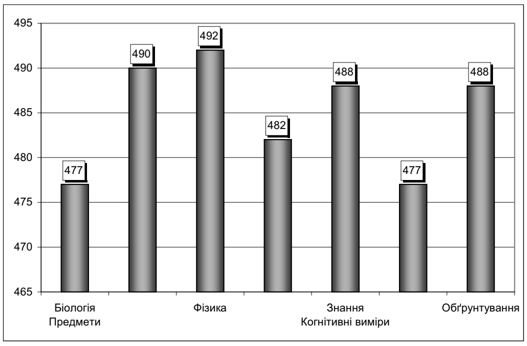
від середнього за дослідженням, що показано на діаграмах:





Блок тестового зошита з природознавства для учнів 8-х класів складався із завдань з біології, хімії, фізики та географії. Значна частина цих завдань мала інтегровану та екологічну спрямованість на з'ясування загальних методів дослідження довкілля. На діаграмі показано результати, здобуті восьмикласниками при виконанні завдань відповідно до предметного розподілу та когнітивних вимірів (завдання на знання фактів та законів, застосування набутих навичок у практичній діяльності, обґрунтування явищ та процесів). Найкраще учні виконали завдання з фізики, а найбільші труднощі викликали завдання з біології.

Результати виконання завдань з природознавства учнями 8-х класів за предметним розподілом та когнітивними вимірами (у балах)



Така тенденція щодо відмінності результатів виконання завдань з різних предметів природничої галузі спостерігається й в інших країнах-учасницях дослідження, що зазначено в табл. 4.

Перший досвід участі України у Міжнародному моніторинговому дослідженні TIMSS показав доцільність впровадження таких порівняльних досліджень на національному рівні та подальшої участі в міжнародних дослідженнях якості освіти.

Аналіз результатів Міжнародного моніторингового дослідження TIMSS було обговорено на колегії Міністерства освіти і науки України, визначено напрями певних змістових та процесуальних змін в організації вивчення природничо-математичних дисциплін у початковій та основній школі.

Таблиця 4

Результати виконання завдань з природознавства учнями 8-х класів країн — учасниць Міжнародного моніторингового дослідження TIMSS (вибірка)

	Середній бал				
	Природознавство	Біологія	Хімія	Фізика	Географія
Сінгапур	567	564	560	575	541
Тайбей	561	549	573	554	545
Японія	554	553	551	558	533
Корейська Республіка	553	548	536	571	538
Великобританія	542	541	534	545	529
Угорщина	539	534	536	541	531
Чехія	539	531	535	537	534
Словенія	538	530	539	524	542
Гонконг	530	527	517	528	532
Росія	530	525	535	519	525
США	520	530	510	503	525
Литва	519	527	507	505	515
Австралія	515	518	505	508	519
Швеція	511	515	499	506	510
Міжнародний середній бал – 500					
Шотландія	496	495	497	494	498
Італія	495	502	481	489	503
Вірменія	488	490	478	503	475
Норвегія	487	487	483	475	502
Україна	**485**	**477**	**490**	**492**	**482**
Йорданія	482	478	491	479	484
Малайзія	471	469	479	484	463
Саудівська Аравія	403	407	390	408	423
Ель Сальвадор	387	398	377	380	400
Ботсвана	355	359	371	351	361
Катар	319	318	322	347	312
Гана	303	304	342	276	294

Література

1. TIMSS 2007 International Science Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades. — International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). — 2008. — 490 с.

2. Матеріали до колегії Міністерства освіти і науки України.

3. *Прокопенко Н. С., Апостолова Г. В.* Основні результати математичної підготовки учнів 8 класів за результатами Міжнародного порівняльного дослідження якості природничо-математичної освіти TIMSS 2007 // Математична газета. Педагогічна преса. — 2009. — № 6.

О. В. ХОМЕНКО,
головний спеціаліст Департаменту загальної середньої та дошкільної освіти Міністерства освіти і науки України.

УДК 372.851:511.17

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ КОНГРУЕНЦІЙ ТА КИТАЙСЬКА ТЕОРЕМА ПРО ОСТАЧІ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

Статтю присвячено олімпіадним задачам, які пов'язані з дослідженням і розв'язуванням лінійних конгруенцій та систем лінійних конгруенцій, а також — суміжним питанням елементарної теорії чисел. Матеріал статті є важливою складовою частиною науково-методичного забезпечення підготовки обдарованих учнів до сучасних математичних олімпіад вищого рівня.

This article is about investigation and solving linear congruences and systems of linear congruences of the mathematical olympiads style. Some adjoint questions of elementary number theory are also discussed here. The contents of this article are a vital component of scientific and methodological provisions towards preparing gifted schoolchildren for contemporary high-level mathematical olympiads.

Теорія чисел належить до найдавніших розділів математики. У класичному розумінні вона займається вивченням властивостей цілих чисел. Теорію чисел іноді називають *вищою арифметикою*, яка виникла із задач, пов'язаних з множенням та діленням цілих чисел. Протягом століть задачі теорії чисел були предметом дослідження багатьох видатних учених. Чимало напрямів у сучасній математиці виникли саме через намагання розв'язати або узагальнити теоретико-числові задачі. Великий математик К. Ф. Гаусс з огляду на це писав: «Математика — цариця наук, а теорія чисел — цариця математики». Задачі теорії чисел привертають увагу не лише професіоналів, але й численних аматорів математики, адже формулювання таких задач у багатьох випадках зрозумілі й учням шкіл. Закономірно, що теоретико-числові задачі входять до «обов'язкової» програми математичних змагань учнів та студентів, зокрема — задачі з теорії чисел посідають чільне місце в завданнях Міжнародних олімпіад з математики.

Дана стаття присвячена олімпіадним задачам, які пов'язані з розв'язуванням лінійних конгруенцій з однією змінною, систем таких конгруенцій, а також — суміжним питанням елементарної теорії чисел.

Зазначимо, що інтерес до задач щодо визначення найменшого натурального числа, яке від ділення на задані числа дає задані остачі, сформувався ще в математиків стародавнього Китаю понад 2000 років тому під час проведення календарних та астрономічних розрахунків. У роботах китайського математика Сунь-цзі, який жив на початку нашої ери, на прикладах проілюстровано загальний метод розв'язування таких задач, а тому загальний результат прийнято називати ***китайською теоремою про остачі***. Подібні задачі розв'язував індійський математик *Брахмагупта* (588—660 рр.). Не тільки математики Китаю та Індії, але й арабські та європейські математики розв'язували такі задачі, зокрема, Леонардо Фібоначчі у своїй книзі «Liber abaci» розглянув задачу про відшукання числа, яке ділиться без остачі на 7 і дає в остачі 1 від його ділення на 2, 3, 4, 5 і 6.

Матеріал статті призначений для підготовки учнів до математичних олімпіад вищого рівня.

З елементарними відомостями про теорію лишків та конгруенцій читачі можуть познайомитись за численними книжками та статтями, зокрема [8-10, 13, 19, 29].

Наведемо основні відомості про лінійні конгруенції та системи лінійних конгруенцій з однією невідомою.

Теорема. Якщо $m > 1$ і $(a; m) = 1$, то конгруенція $ax = b(\mathrm{mod}\, m)$ має рівно одне розв'язання (клас лишків за $\mathrm{mod}\, m$).*

Доведення. Розглянемо числа $a \cdot 0$, $a \cdot 1$, ..., $a \cdot (m - 1)$, серед яких немає жодних двох, конгруентних за $\mathrm{mod}\, m$, оскільки $a(i-j) \neq 0 (mod\, m)$, $0 \leq i \neq j \leq m-1$. Отже, ці m чисел утворюють повну систему лишків за $\mathrm{mod}\, m$, а тому рівно одне з них (позначимо його ax_0, $0 \leq x_0 \leq m-1$) є конгруентним числу b за $\mathrm{mod}\, m$. Зрозуміло, що клас лишків, якому належить x_0, є єдиним розв'язком конгруенції. ■**

Надзвичайно важливою в класичній теорії чисел є функція Ейлера $\varphi : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$, котра визначається так [1, 8—10, 25].

Візьмемо $\varphi(1)=1$, а для $n > 1$ $\varphi(n)$ — кількість натуральних чисел, менших від n та взаємно простих із n.

Як добре відомо, функція Ейлера має властивість *мультиплікативності*: якщо натуральні числа n і m взаємно прості, то $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$. Якщо для числа n дається його канонічний розклад $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, то

$$\varphi(n) = n\prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

---

* Символами $(a; b)$ і $[a; b]$ позначаються, відповідно, *найбільший спільний дільник* та *найменше спільне кратне* цілих чисел a і b. Зазначимо також, що для позначення подільності числа a без остачі на число b у статті для зручності використовуються обидва позначення: $b \mid a$ та $a \,\vdots\, b$.

** Символ ■ використовується для виділення завершення доведень теорем, розв'язань задач.

Нагадаємо, що мають місце такі факти.

Теорема Ейлера. Якщо $m > 1$ і $(a; m) = 1$, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1(\mathrm{mod}\,m)$.

Мала теорема Ферма. Якщо p — просте число, і a не ділиться без остачі на p, то $a^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$.

Отже, якщо $m > 1$ і $(a; m) = 1$, то розв'язання конгруенції $ax \equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ можна подати у вигляді $x \equiv ba^{\varphi(m)-1}(\mathrm{mod}\,m)$.

Якщо $\delta = (a; m)$ і $b \not\vdots\, \delta$, то, зрозуміло, конгруенція $ax = b(\mathrm{mod}\,m)$ не має розв'язань.

Пропонуємо читачам самостійно довести таке твердження.

Лема. Числа класу $\bar{u}$ за $\mathrm{mod}\,m$ утворюють k класів лишків за $\mathrm{mod}\,km$, а саме класи $\overline{u+jm},\ 0 \le j \le k-1$.

Теорема. Якщо $b \vdots \delta$, то конгруенція $ax = b(\mathrm{mod}\,m)$ має рівно δ розв'язань — класів лишків за $\mathrm{mod}\,m$. Усі ці розв'язки утворюють один клас лишків за $\mathrm{mod}\,\frac{m}{\delta}$.

Доведення. Конгруенція $ax = b(\mathrm{mod}\,m)$ рівносильна конгруенції $\frac{a}{\delta}x \equiv \frac{b}{\delta}\left(\mathrm{mod}\,\frac{m}{\delta}\right)$. Залишається скористатись тим, що $\left(\frac{a}{\delta}; \frac{m}{\delta}\right) = 1$, а також — попередньою лемою ■.

Зрозуміло, що якщо кожна конгруенція системи

$$\begin{cases} a_1x \equiv b_1(\mathrm{mod}\,\mu_1), \\ \dots\dots\dots\dots, \\ a_nx \equiv b_n(\mathrm{mod}\,\mu_n) \end{cases}$$

має розв'язання, то така система конгруенцій зводиться до вигляду

$$\begin{cases} x \equiv c_1(\mathrm{mod}\,m_1), \\ \dots\dots\dots\dots, \\ x \equiv c_n(\mathrm{mod}\,m_n) \end{cases}.$$

Дослідимо спочатку систему двох лінійних конгруенцій

$$\begin{cases} x \equiv c_1(\mathrm{mod}\,m_1), \\ x \equiv c_2(\mathrm{mod}\,m_2). \end{cases}$$

Із першої конгруенції маємо, що $x = c_1 + m_1t$. Задача зводиться до конгруенції $m_1t \equiv c_2 - c_1(\mathrm{mod}\,m_2)$. Позначимо $\delta = (m_1;m_2)$, $M = [m_1;m_2]$. Остання конгруенція має розв'язання тоді й тільки тоді, коли $c_2 - c_1 \vdots\, \delta$, і при цьому розв'язання утворюють один клас лишків $\bar{t_0}$ за $\mathrm{mod}\,\frac{m_2}{\delta}$. Звідси $x = c_1 + m_1 \cdot \left(t_0 + \frac{m_2}{\delta}v\right)$, $v \in \mathrm{Z}$, тобто $x = c_1 + m_1t_0 + \frac{m_1m_2}{\delta}v$, $v \in \mathrm{Z}$. Оскільки, як добре відомо, $(m_1;m_2) \cdot [m_1;m_2] = m_1m_2$, то $x = c_1 + m_1t_0 + Mv$, $v \in \mathrm{Z}$. Відтак, розглянута система двох конгруенцій має розв'язання тоді й тільки тоді, коли $c_2 - c_1 \vdots\, \delta$, і при цьому розв'язання утворюють один клас лишків за $\mathrm{mod}\,m$.

Теорема. Система лінійних конгруенцій $x \equiv c_i(\mathrm{mod}\,m_i)$, $i = \overline{1, n}$, або взагалі не має розв'язань, або має один розв'язок — клас лишків за $\mathrm{mod}\,M$, де M — найменше спільне кратне чисел $m_1, \dots, m_n$.

Доведення. Скористаємось методом математичної індукції. Базу індукції — випадок $n = 2$ — розглянуто вище. Припустимо, що твердження теореми справджується для будь-яких n лінійних конгруенцій, і візьмемо систему з $n+1$ конгруенції:

$$\begin{cases} x \equiv c_1(\mathrm{mod}\,m_1), \\ \dots\dots\dots\dots, \\ x \equiv c_n(\mathrm{mod}\,m_n), \\ x \equiv c_{n+1}(\mathrm{mod}\,m_{n+1}). \end{cases} \quad (*)$$

Якщо система з перших n конгруенцій не має розв'язань, то не має розв'язань і система (*). Якщо система з перших n конгруенцій має розв'язання, то вони утворюють єдиний клас x_0 за $\mathrm{mod}\,M'$, де M' — найменше спільне кратне чисел $m_1, \dots, m_n$. Тоді система (*) рівносильна системі

$$\begin{cases} x \equiv x_0(\mathrm{mod}\,M'), \\ x \equiv c_{n+1}(\mathrm{mod}\,m_{n+1}). \end{cases} (**)$$

Система (**), у свою чергу, або не має розв'язань, або всі розв'язання об'єднуються в один клас лишків за $\mathrm{mod}[M';m_{n+1}]$, тобто за $\mathrm{mod}\,M$. ■

Тепер уже легко довести ***китайську теорему про остачі.***

Теорема. Якщо $m_1, m_2, \dots, m_n$ є попарно взаємно простими натуральними числами, більшими від 1, тоді система конгруенцій $x \equiv c_i(\mathrm{mod}\,m_i)$, $i = \overline{1, n}$ має єдине розв'язання, яке утворює клас лишків за $\mathrm{mod}\,M$, де $M = \prod_{i=1}^{n} m_i$.

Доведення. Для кожного $i = \overline{1, n}$ візьмемо таке число y_i, що $\frac{M}{m_i}y_i \equiv 1(\mathrm{mod}\,m_i)$ (зрозуміло, що такі числа існують). Неважко переконатись (залишаємо це читачам), що число $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{M}{m_i}y_ic_i$ задовольняє всі конгруенції

$x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$, $i = \overline{1, n}$. Відтак, система $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$, $i = \overline{1, n}$ є сумісною, а тому, за попередньою теоремою, всі числа, що її задовольняють, об'єднуються в єдиний клас лишків за $\mathrm{mod} M$, причому саме в той клас лишків, який породжується числом x_0.■

Зауваження. Ми навели «конструктивне» доведення. Втім, китайську теорему про остачі можна легко довести методом математичної індукції. До того ж, під час доведення китайської теореми про остачі можна було б і не використовувати попередню теорему, а помітити, що якщо якесь ціле x' задовольняє систему, то $x' \equiv x_0 (\mathrm{mod} m_i)$ для всіх $i = \overline{1, n}$. Звідси робимо висновок, що $x' - x_0 \vdots M$, оскільки числа $m_1, m_2, ..., m_n$ попарно взаємно прості.

З практичної точки зору знаходити розв'язки таких систем конгруенцій зручно, розв'язуючи спочатку систему з двох перших конгруенцій (у спосіб, наведений вище), а потім — приєднуючи по одній решту конгруенцій.

Наведемо важливий ***критерій*** сумісності системи лінійних конгруенцій (яким узагальнюється і китайська теорема про остачі).

Теорема. Система лінійних конгруенцій $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$, $i = \overline{1, n}$, має розв'язання тоді й тільки тоді, коли для будь-яких i та j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $c_i - c_j \vdots (m_i; m_j)$.

Доведення. Необхідність такої умови є очевидною. Достатність для $n = 2$ встановлена вище. Нехай $\delta = (m_1; m_2)$, тоді розв'язання системи $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$, $i = \overline{1, 2}$, як легко встановити, має вигляд $x \equiv c' (\mathrm{mod}[m_1; m_2])$, де

$$c' = (c_2 - c_1)\left(\frac{m_1}{\delta}\right)^{\varphi(m_2/\delta)} + c_1 .$$

Тепер візьмемо систему з трьох перших конгруенцій, яка рівносильна системі

$$\begin{cases} x \equiv c' (\mathrm{mod}[m_1;\ m_2]), \\ x \equiv c_3 (\mathrm{mod} m_3). \end{cases}$$

Доведемо, що

$$c' - c_3 = (c_2 - c_1)\left(\frac{m_1}{\delta}\right)^{\varphi(m_2/\delta)} + (c_1 - c_3) \vdots d ,$$

де $d = ([m_1; m_2]; m_3)$.

Запишемо канонічний розклад $d = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots p_s^{\alpha_s}$. Потрібно показати, що $c' - c_3 \vdots p_i^{\alpha_i}$ для кожного $i = \overline{1, s}$. Слід розглянути такі випадки.

Якщо $p_i^{\alpha_i}$ є дільником кожного з чисел m_1, m_2, m_3, то $c_2 - c_1 \vdots (m_2; m_1)$, $c_3 - c_1 \vdots (m_3; m_1)$, $(m_2;\ m_1) \vdots p_i^{\alpha_i}$, $(m_3;\ m_1) \vdots p_i^{\alpha_i}$, і тому $c' - c_3 \vdots p_i^{\alpha_i}$.

Якщо $p_i^{\alpha_i}$ є дільником чисел m_1 та m_3, але не є дільником числа m_2, то, зрозуміло, $c_3 - c_1 \vdots p_i^{\alpha_i}$. Позначимо $\beta = max\left\{u \geq 0 \middle| m_2 \vdots p_i^u\right\}$, $\beta < \alpha_i$. Число p_i^β є дільником числа $(m_1; m_2)$, а тому $c_2 - c_1 \vdots p_i^\beta$. Оскільки $\frac{m_1}{\delta} \vdots p_i^{\alpha_i - \beta}$, то $c' - c_3 \vdots p_i^{\alpha_i}$.

Якщо $p_i^{\alpha_i}$ є дільником чисел m_2 та m_3, але не є дільником числа m_1, то $c_2 - c_3 \vdots p_i^{\alpha_i}$, і запишемо $c' - c_3$ у вигляді $c' - c_3 = (c_2 - c_3) + (c_2 - c_1)\left(\left(\frac{m_1}{\delta}\right)^{\varphi(m_2/\delta)} - 1\right)$. Нехай $\gamma = max\left\{u \geq 0 \middle| m_1 \vdots p_i^u\right\}$, $\gamma < \alpha_i$. Тоді $c_2 - c_1 \vdots p_i^\gamma$. Оскільки $\left(\frac{m_1}{\delta}; \frac{m_2}{\delta}\right) = 1$, то згідно з теоремою Ейлера $\left(\frac{m_1}{\delta}\right)^{\varphi(m_2/\delta)} \equiv 1\left(mod\,\frac{m_2}{\delta}\right)$. З урахуванням того, що $\frac{m_2}{\delta} \vdots p_i^{\alpha_i - \gamma}$, маємо тепер: $(c_2 - c_1)\left(\left(\frac{m_1}{\delta}\right)^{\varphi(m_2/\delta)} - 1\right) \vdots p_i^{\alpha_i}$, $c' - c_3 \vdots p_i^{\alpha_i}$.

Скористаємось методом математичної індукції. Візьмемо $n \geqslant 4$ і припустимо, що потрібний факт має місце для всіх $k < n$. Доведемо його і для $k = n$. Система, утворена першими $n - 2$ конгруенціями, має розв'язок $x \equiv c (\mathrm{mod} M')$, де $M' = [m_1; ...; m_{n-2}]$. Тоді система $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$, $i = \overline{1, n}$, рівносильна системі трьох конгруенцій

$$\begin{cases} x \equiv c(\mathrm{mod} M'), \\ x \equiv c_{n-1}(\mathrm{mod} m_{n-1}), \\ x \equiv c_n(\mathrm{mod} m_n). \end{cases} (*)$$

Системи

$$\begin{cases} x \equiv c(\mathrm{mod} M'), \\ x \equiv c_{n-1}(\mathrm{mod} m_{n-1}) \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} x \equiv c(\mathrm{mod} M'), \\ x \equiv c_n(\mathrm{mod} m_n) \end{cases}$$

є, згідно з припущенням індукції, сумісними, а тому $c - c_{n-1} \vdots (M'; m_{n-1})$, $c - c_n \vdots (M'; m_n)$. Крім того, $c_n - c_{n-1} \vdots (m_n; m_{n-1})$. Відтак, за доведеним раніше, система трьох конгруенцій (*) сумісна. ■

Задача 1. Розв'язати систему конгруенцій

$$\begin{cases} x \equiv 2(\mathrm{mod} 3), \\ x \equiv 1(\mathrm{mod} 5), \\ x \equiv -3(\mathrm{mod} 7). \end{cases}$$

Відповідь: $x = 11(\mathrm{mod}105)$.

У книжці [28, с. 24, 146—148] розглядається задача про те, що для будь-якого $m, 5 \leqslant m \leqslant 16$, серед m послідовних натуральних чисел завжди знайдеться число, взаємно просте з рештою. Для $m = 17$ наводиться контрприклад. До того ж, у [28] висловлюється припущення (*гіпотеза Ченцова*), що випадок $m = 17$ є «розділювальним», тобто для $m \geqslant 17$ твердження задачі не має місця. Наскільки відомо авторам статті, цей результат із доведенням уперше був надрукований значно пізніше в статті [26].

Теорема [26]. Для кожного натурального $m \geqslant 17$ існує набір із m послідовних натуральних чисел, серед яких немає жодного числа, взаємно простого з рештою чисел цього набору.

Доведення. Нехай $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ — множина всіх простих чисел. Позначимо через s кількість простих чисел, менших від m. Потрібний набір існує тоді й тільки тоді, коли множину $W_m = \{1;2;\ldots;m\}$ можна подати у вигляді

$$\{1;\ 2;\ \ldots;\ m\} = \bigcup_{j=1}^{s} F_j\ ,$$

де

$$F_j = \left\{a_j + p_j t \,\middle|\, 0 \le t \le \left[\left(m - a_j\right)/\ p_j\right]\right\},$$

$$1 \leqslant a_j \leqslant m - p_j,\quad j = \overline{1,\ s}$$

(кожна з множин об'єднання містить щонайменше два числа).

Насправді, нехай натуральне число x задовольняє систему конгруенцій $x \equiv 1 - a_j(\mathrm{mod}p_j)$, $j = \overline{1,\ s}$ (згідно з ***китайською теоремою про остачі*** таке x існує). Покажемо, що набір $b_1 = x,\ b_2 = x + 1,\ \ldots,\ b_m = x + m - 1$, задовольняє умову задачі. Візьмемо довільне i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Оскільки $\left|F_j\right| \ge 2$ для всіх $j = \overline{1,\ s}$, то існують такі q і v, $1 \leqslant q \neq i \leqslant m$, $1 \leqslant v \leqslant s$, де числа i та q належать до множини $\left\{a_v + p_v t \,\middle|\, 0 \le t \le \left[\left(m - a_v\right)/\ p_v\right]\right\}$. Відтак,

$$b_i = x + i - 1 \equiv x - 1 + a_v \equiv 0\left(\mathrm{mod}p_v\right),$$

$$b_q = x + q - 1 \equiv x - 1 + a_v \equiv 0\left(\mathrm{mod}p_v\right).$$

Зауважимо, що обернене твердження є очевидним.

Для $m = 17$ маємо $s = 6$. Множину W_{17} подаємо як об'єднання множин $F_1 = \{1;3;5;7;9;11;15;17\}$ (для $p_1 = 2$), $F_2 = \{1;4;7;10;13;16\}$ (для $p_2 = 3$), $F_3 = \{2;7;12;17\}$ (для $p_3 = 5$), $F_4 = \{1;8;15\}$ (для $p_4 = 7$), $F_5 = \{6;17\}$ (для $p_5 = 11$), $F_6 = \{1;14\}$ (для $p_6 = 13$). Тоді, розв'язуючи наведену вище систему конгруенцій, одержуємо, наприклад, такий набір із 17 послідовних цілих чисел: 2184, 2185, ..., 2200.

Для $m \in \{18;19;20;21;22\}$ шукані подання множин W_m неважко одержуються доповненням побудованих для $m = 17$ множин F_j, $1 \leqslant j \leqslant 6$, «черговими» членами арифметичних прогресій, причому для $m \in \{18;19\}$ слід додати множину $F_7 = \{1;18\}$ (для $p_7 = 17$), а для $m \in \{20;21;22\}$ — ще й множину $F_8 = \{1;20\}$ (для $p_8 = 19$).

Для $m = 17$ множину W_{17} можна подати також і як об'єднання

$$\{1;3;5;7;9;11;13;15;17\} \cup \{2;5;8;11;14;17\} \cup \{1;6;11;16\} \cup \{3;10;17\} \cup \{1;12\} \cup \{4;17\}.$$

Саме цю конструкцію узагальнимо для отримання потрібного результату. Зафіксуємо натуральне $i \geqslant 5$ і оберемо натуральне

$$m \in [p_i + p_{i+1} - 1;\ p_{i+1} + p_{i+2} - 1).$$

Нагадаємо читачам, що для довільного дійсного $x > 1$ інтервал $(x;\,2x)$ містить принаймні одне просте число (теорема Бертрана-Чебишова). За «підсиленою» теоремою Бертрана-Чебишова (див., наприклад, [15, с. 356]), для будь-якого $n \geqslant 29$ має місце нерівність $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} < \dfrac{5}{4}$, звідки

$$\frac{p_{n+3}}{p_n} = \frac{p_{n+3}}{p_{n+2}} \cdot \frac{p_{n+2}}{p_{n+1}} \cdot \frac{p_{n+1}}{p_n} < \left(\frac{5}{4}\right)^3 < 2\,.$$

А тому для $n \geqslant 29$ $p_n < p_{n+1} < p_{n+2} < p_{n+3} < 2p_n$, тобто в інтервалі $(p_n;\,2p_n)$ міститься щонайменше три простих числа. Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що цей факт справджується для всіх $n \geqslant 5$.

Отже, будемо далі використовувати для $i \geqslant 5$ оцінки

$$2p_{i-1} > p_{i+1} < p_i < p_{i-1},\ p_i + p_{i-1} > p_{i+2},$$
$$2p_i > p_{i+3} > p_{i+2} > p_{i+1} > p_i.$$

Розглянемо (для зручності — у вигляді зображеної нижче таблиці) наступні арифметичні прогресії (для кожної з них розглядаються тільки члени, що потрапляють до сегмента $[1;\,m]$).

Різниця	Члени прогресії				
$p_1 = 2$	…	$p_i - 2$	p_i	$p_i + 2$	…
$p_2 = 3$	…	$p_i - 3$	p_i	$p_i + 3$	…
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p_{i-2}	…	$p_i - p_{i-2}$	p_i	$p_i + p_{i-2}$	…
p_{i-1}	…	$p_i - 1$	$p_i - 1 + p_{i+1}$		
p_i		1	$p_i + 1$	…	…
p_{i+1}		$p_i - p_{i-1}$	$p_i - p_{i-1} + p_{i+1}$		
p_{i+2}		$p_i + p_{i-1} - p_{i+2}$	$p_i + p_{i-1}$		
p_{i+3}		$2p_i - p_{i+3}$	$2p_i$		

Числа $p_i - 1$, p_i, $p_i + 1$, $p_i - 1 + p_{i-1}$ присутні в таблиці. Візьмемо натуральне число $u \leqslant p_i - 2$. Тоді $p_k \mid p_i - u$ для деякого k, $1 \leqslant k \leqslant i - 1$. Якщо $1 \leqslant k \leqslant i - 2$, то, зрозуміло, число u присутнє в рядку з номером k (ліворуч від p_i). Якщо $p_{i-1} \mid p_i - u$, то, враховуючи нерівність $2p_{i-1} > p_i > p_{i-1}$, маємо, що $p_i - u = p_{i-1}$, тобто $u = p_i - p_{i-1}$, і таке число міститься в таблиці. Нехай тепер $p_i + 2 \leqslant u \leqslant p_i + p_{i-1} - 2$, $2 \leqslant u - p_i \leqslant p_{i-1} - 2$. Тоді існує k, $1 \leqslant k \leqslant i - 2$, для якого $p_k \mid u - p_i$, і число u знаходиться в рядку з номером k (праворуч від p_i). Якщо $m \in [p_i + p_{i-1}; 2p_i)$, то достатньо розглядати випадок $p_i + p_{i-1} \leqslant u \leqslant m \leqslant 2p_i - 1$, $p_{i-1} \leqslant u - p_i \leqslant p_i - 1$. Ситуація, коли $p_k \mid u - p_i$ для деякого k, $1 \leqslant k \leqslant i - 2$ є очевидною, а за умови $p_{i-1} \mid u - p_i$ легко одержати рівність $u = p_i + p_{i-1}$, і задіюється рядок з номером $i + 2$. Нехай тепер $m \in [2p_i; p_{i+1} + p_i - 1)$. Слід розглянути випадок $2p_i \leqslant u \leqslant m \leqslant p_{i+1} + p_i - 2$. Для $u = 2p_i$ потрібний рядок з номером $i + 3$. Якщо ж $2p_i + 1 \leqslant u \leqslant p_{i+1} + p_i - 2$, то $p_i + 1 \leqslant u - p_i \leqslant p_{i+1} - 2$. Знов-таки, якщо $p_k \mid u - p_i$ для деякого k, $1 \leqslant k \leqslant i - 2$, то все зрозуміло, а за умови $p_{i-1} \mid u - p_i$ маємо рівність $u = p_i + p_{i-1}$. Припустимо, що $p_i \mid u - p_i$. Тоді $u = tp_i$, $t \geqslant 2$, $t \in \mathrm{N}$. Число $2p_i$ в таблиці міститься, і залишається зауважити, що нерівність $t \geqslant 3$ виконуватись не може, оскільки, відповідно до теореми Бертрана-Чебишова, $2p_i > p_{i+1}$. Цим і завершується доведення.■

Задача 2 (*Всесоюзна МО, 1981 р.*). Знайти принаймні одне натуральне число n, для якого серед послідовних чисел n, $n + 1$, $n + 2$, ..., $n + 20$ не буде жодного взаємно простого з числом 30 030.

Розв'язання. Зауважимо, що $30\,030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Позначимо $M = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Нехай натуральне k задовольняє систему конгруенцій

$$\begin{cases} Mk \equiv 1(\mathrm{mod}\,11), \\ Mk \equiv -1(\mathrm{mod}\,13). \end{cases}$$

Тоді число $n = Mk - 10$ задовольняє умову задачі.■

Задача 3 [24]. Довести, що існує безліч таких натуральних чисел n, що зміною однієї (будь-якої) цифри числа n не можна одержати з нього просте число.

Розв'язання. Можна розглянути таку систему конгруенцій:

$$\begin{cases} n \equiv 0(\mathrm{mod}\,10), \\ n \equiv -1(\mathrm{mod}\,11), \\ n \equiv -9(\mathrm{mod}\,3), \\ n \equiv -7(\mathrm{mod}\,7), \end{cases}$$

розв'язком якої є $n = -210(\mathrm{mod}\,2310)$.■

Задача 4 [24]. Довести, що для будь-якого натурального n існує таке просте число P, що кожне з чисел $p - 1$, $p + 1$ та $p + 2$ має щонайменше n різних простих дільників.

Розв'язання. Нехай $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ — множина всіх простих чисел. За ***китайською теоремою про остачі*** існує таке натуральне B, що

$$B \equiv 1(\mathrm{mod}\,p_1p_2 \ldots p_n),$$
$$B \equiv -1(\mathrm{mod}\,p_{n+1}p_{n+2} \ldots p_{2n}),$$
$$B \equiv -2(\mathrm{mod}\,p_{2n+1}p_{2n+2} \ldots p_{3n}).$$

Очевидно, що число $A = p_1p_2 \ldots p_{3n}$ взаємно просте з B. Згідно з класичною теоремою Діріхле про арифметичні прогресії [25] для деякого натурального числа k число $P = Ak + B$ є простим. Зрозуміло, що таке P задовольняє умову задачі, оскільки

$$p_1p_2 \ldots p_n \mid p - 1,$$
$$p_{n+1}p_{n+2} \ldots p_{2n} \mid p + 1,$$
$$p_{2n+1}p_{2n+2} \ldots p_{3n} \mid p + 2.$$ ■

Задача 5 (*IMO, 2004 р.*). Назвемо натуральне число *смугастим*, якщо будь-які дві сусідні цифри в його десятковому запису мають різну парність. Знайти всі натуральні n, для кожного з яких знайдеться *смугасте* число, що ділиться без остачі на n.

Розв'язання. Якщо $n \vdots 20$, то останні дві цифри десяткового запису числа n є парними, а тому для таких чисел не існує смугастого числа, яке ділиться без остачі на n.

Доведемо, що коли n не ділиться на 20, то існує смугасте число, котре ділиться без остачі на n.

Якщо для натурального $u > 1$ $k = max\left\{m \in \mathrm{N} \,\middle|\, a \vdots u^m\right\}$, то будемо це записувати так: $u^k \| a$.

Лема 1. Для кожного $n \in \mathrm{N}$ існує смугасте число з парною кількістю цифр, яке ділиться без остачі на 2^n.

Доведення. За індукцією побудуємо таку послідовність десяткових цифр $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, що $a_n \equiv n + 1(\mathrm{mod}\,2)$, $2^{2n-1} \| \overline{a_{2n-1} \ldots a_1}$ і $2^{2n+1} \| \overline{a_{2n}a_{2n-1} \ldots a_1}$ для всіх натуральних n. Візьмемо $a_1 = 2$, $a_2 = 7$. Припустимо, що потрібна послідовність цифр побудована до a_{2n} включно, і покладемо $a_{2n+1} = 4$. За припущенням індукції $2^{2n+1} \| \overline{a_{2n}a_{2n-1} \ldots a_1}$, а тому, як неважко побачити, $2^{2n+1} \| \overline{a_{2n+1}a_{2n} \ldots a_1}$, $2^{2n+1} \cdot A = \overline{a_{2n+1}a_{2n} \ldots a_1}$, де A — непарне натуральне число. Цифра a_{2n+2} повинна бути непарною і задовольняти умову $2^{2n+3} \| \overline{a_{2n+2}a_{2n+1} \ldots a_1}$, $\overline{a_{2n+2}a_{2n+1} \ldots a_1} = 2^{2n+1}\left(a_{2n+2} \cdot 5^{2n+1} + A\right)$. Оберемо цю цифру з множини $\{0;1;...;7\}$ як розв'язок конгруенції $5a_{2n+2}+A\equiv 4(\mathrm{mod}8)$.

Лема 2. Для кожного $n\in\mathrm{N}$ існує смугасте число з парною кількістю цифр, яке ділиться без остачі на $2\cdot 5^n$.

Доведення. За індукцією побудуємо таку послідовність десяткових цифр $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, що $b_n\equiv n+1(\mathrm{mod}2)$, і $\overline{b_n\dots b_1}\vdots 2\cdot 5^n$ для всіх натуральних n. Візьмемо $b_1=0$, $b_2=5$. Припустимо, що цифри $b_1,...,b_n$ вже визначені, і нехай $5^m\|\overline{b_n\dots b_1}$, $m\geqslant n$, $\overline{b_n\dots b_1}=B\cdot 5^m$. Наступна цифра b_{n+1} має бути такою, що $b_{n+1}\equiv n+2(\mathrm{mod}2)$ і $\overline{b_{n+1}b_n\dots b_1}=b_{n+1}10^n+\overline{b_n\dots b_1}=5^n\left(b_{n+1}\cdot 2^n+5^{m-n}\cdot B\right)\vdots 5^{n+1}$. Отже $b_{n+1}\in\{0;1;...;9\}$ можна обрати як розв'язок системи конгруенцій

$$\begin{cases} b_{n+1}\equiv n+2(\mathrm{mod}2),\\ b_{n+1}\cdot 2^n\equiv -B(\mathrm{mod}5)\end{cases}$$

(така система відповідно до ***китайської теореми про остачі*** має розв'язок).

Нехай тепер $n=2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}\cdot k$, $(k;10)=1$. Якщо n не ділиться без остачі на 20, то, згідно з лемами 1 і 2, існує смугасте число M, яке складається з парної кількості цифр (позначимо цю кількість через $2m$, і яке ділиться без остачі на $2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$. Розглянемо числа вигляду $C_j=1+10^{2m}+\dots+10^{2m(j-1)}$, $j=\overline{1,\,k+1}$. За принципом Діріхле деякі два з них — C_p і C_q, $p<q$ — дають однакові остачі за mod$k$, а тому $C_q-C_p=C_{q-p}\cdot 10^{2mp}\vdots k$. Отже, $C_{q-p}\vdots k$ і, як неважко побачити, число $C_{q-p}\cdot M$ є смугастим числом вигляду $\overline{MM\dots M}$ і ділиться без остачі на n. ■

Задача 6 (*Всеукраїнська МО,* 2001 р.). Про натуральні числа a і n відомо, що a^2+1 ділиться без остачі на n. Довести, що існує таке натуральне число b, що b^2+1 ділиться без остачі на $n(n^2+1)$.

Розв'язання. Числа n та n^2+1 взаємно прості. Відповідно до ***китайської теореми про остачі*** випливає, що існує таке b, що $b\equiv a(\mathrm{mod}n)$, та $b\equiv n(\mathrm{mod}n^2+1)$. Тоді $b^2+1\equiv a^2+1\equiv 0(\mathrm{mod}n)$ та $b^2+1\equiv n^2+1\equiv 0(\mathrm{mod}n^2+1)$. Отже, b^2+1 ділиться без остачі на n та на n^2+1.■

Задача 7 (*Short List IMO*, 2005 р.). Нехай a і b — такі натуральні числа, що для будь-якого $n\in\mathrm{N}$ b^n+n ділиться без остачі на a^n+n. Довести, що $a=b$.

Розв'язання. Припустимо, що $a\neq b$. Помітимо, що тоді $b>a$ (для цього візьмемо $n=1$). Нехай $p>b>a$ — просте число. Тоді, за Малою теоремою Ферма, $a^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}p)$. За ***китайською теоремою про остачі*** існує таке натуральне n, що $n\equiv 1(\mathrm{mod}p-1)$ і $n\equiv -a(\mathrm{mod}p)$. Відтак, $n=1+(p-1)t$, $t\in\mathrm{N}$, і маємо, що $a^n=a^{1+(p-1)t}\equiv a(p)$. Звідси випливає, що $a^n+n\equiv 0(\mathrm{mod}p)$, $p\mid b^n+n$. Оскільки $b^n\equiv b(\mathrm{mod}p)$, то $b^n+n\equiv b-a(\mathrm{mod}p)$. Отже, $p\mid b-a$, що неможливо.■

Зауваження. Нехай $b>1$, $a=1$, $n=p-1$, $p>b$ — довільне просте число. Тоді $b^n+n\equiv b^{p-1}+p-1\vdots p$, тобто $b^n+n\vdots a^n+n$, хоча $b\neq a$.

Задача 8 [24]. Нехай a і b — довільні натуральні числа, $\{an+b\mid n\in\mathrm{N}\}$ — нескінченна зростаюча арифметична прогресія. Довести, що для будь-якого натурального m у цій прогресії існує щонайменше m послідовних членів, які є складеними числами.

Розв'язання. Розглянемо прості числа $q_1<q_2<\dots<q_m$, які не є дільниками числа a. За ***китайською теоремою про остачі*** існує натуральне число x, для якого виправдовуються конгруенції $ax\equiv -b-ai\left(\mathrm{mod}q_i^2\right)$, $i=\overline{1,\,m}$. Таким чином, для $i=\overline{1,\,m}$ $q_i^2\mid a(x+i)+b$. Звідси випливає, що числа $a(x+i)+b$, $i=\overline{1,\,m}$ задовольняють умову задачі.■

Задача 9 [6]. Довести, що для будь-якого натурального числа n існує n послідовних натуральних чисел, кожне з яких ділиться на квадрат цілого числа, більшого від 1.

Розв'язання. Нехай p_1^2, p_2^2, ..., p_n^2 — квадрати n різних простих чисел. За ***китайською теоремою про остачі*** існує таке натуральне число m, яке від ділення на числа p_1^2, p_2^2, ..., p_n^2 дає остачі $r_1=p_1^2-1$, $r_2=p_2^2-2$, ..., $r_n=p_n^2-n$ відповідно. Тому n послідовних натуральних чисел $m+1$, $m+2$, ..., $m+n$ будуть ділитися без остачі на числа p_1^2, p_2^2, ..., p_n^2 відповідно.■

Задача 10 [4, 11]. Генерал хоче для проведення параду вишикувати солдатів у декілька рівних квадратних каре, але він не знає, скільки з них знаходиться в шпиталі, який може прийняти до m хворих. Довести, що генералові можна надати таку кількість солдатів, що він, незалежно від того, скільки з них потрапить до шпиталю, зможе здійснити свій намір. (Наприклад, 9 солдатів можна вишикувати у вигляді каре 3×3, а якщо один із них захворів, — у вигляді двох квадратів 2×2.)

Розв'язання. Нехай p_1^2, p_2^2, ..., p_{m+1}^2 — квадрати $m+1$ різних простих чисел. Потрібну кількість солдатів можна знайти із системи конгруенцій $x\equiv i-1(\mathrm{mod}p_i^2)$, $i=\overline{1,\,m+1}$.■

Задача 11 [30]. Нехай $n\geqslant 2$. Для того, щоб для набору $A=\{a_1;\,a_2;\,\dots;\,a_n\}$ із n різних натуральних чисел існувало таке натуральне число b, що числа $b+a_1$, $b+a_2$, ..., $b+a_n$ попарно взаємно прості, **необхідно й достатньо**, щоб для будь-якого простого p серед остач від ділення всіх чисел набору A на p принаймні одне з чисел 0, 1, ..., $p-1$ зустрічалось не більше одного разу. Довести це твердження.

Доведення. **Необхідність.** Припустимо супротивне: серед остач від ділення чисел набору A на p кожна з можливих остач 0, 1, ..., $p-1$ зустрічається щонайменше двічі. Візьмемо довільне натуральне b, і нехай $b \equiv r\,(\mathrm{mod}\,p)$, де $r \in \{1;2;\ \dots;p\}$. Тоді для деяких i та j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $a_i \equiv a_j \equiv p-r(\mathrm{mod}\,p)$. Отже, $a_i + b \equiv a_j + b \equiv 0$. Суперечність.

Достатність. Нехай $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, $\Delta = a_n - 1$. Розглянемо всі прості числа $p_1 < p_2 < \dots < p_s$, які не перевищують Δ, і для кожного з них через r_k, $k = \overline{1,s}$ позначимо таку з остач від ділення чисел набору A на p_k, яка зустрічається не більше одного разу. За ***китайською теоремою про остачі*** існує таке натуральне b, що $b \equiv p_k - r_k(\mathrm{mod}\,p_k)$, $k = \overline{1,s}$. Доведемо, що числа $a_1 + b$, ..., $a_n + b$ попарно взаємно прості. Якщо для якого-небудь m, $1 \leqslant m \leqslant s$ існують такі i та j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, що $a_i + b \equiv a_j + b \equiv 0(\mathrm{mod}\,p_m)$, то

$$a_i + p_m - r_m \equiv a_j + p_m - r_m \equiv 0(\mathrm{mod}\,p_m).$$

Звідси $a_i \equiv a_j \equiv r_m(\mathrm{mod}\,p_m)$, що неможливо. Припустимо тепер, що для простого $p > \Delta$ існують такі i та j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, що $a_i + b \equiv a_j + b \equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$. Тоді $p \mid a_j - a_i$, що суперечить нерівності $p > \Delta \geqslant a_j - a_i$.■

Зауваження. Набір $A = \{a_1;a_2;\dots;a_n\}$, який складається з n різних попарно взаємно простих натуральних чисел, задовольняє потрібні умови [20, с. 27]. Візьмемо $P = \prod\limits_{1\le i<j\le n} \left|a_i - a_j\right|$, і тоді для всіх $n \in \mathrm{N}$ $(a_i + nP; a_j + nP) = 1$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$ (якщо для натурального $\delta > 1$ $a_i + nP \,\vdots\, \delta$ і $a_j + nP \,\vdots\, \delta$, то $a_j - a_i \,\vdots\, \delta$, і тому $P \,\vdots\, \delta$; звідси $a_i \,\vdots\, \delta$ і $a_j \,\vdots\, \delta$, що неможливо).

Задача 12 (*IMO*, 1989 р., див. також [24]). Довести, що для будь-якого натурального n існує n послідовних натуральних чисел, жодне з яких не є ступенем натурального числа з показником ступеня, більшим від 1.

Розв'язання. Нехай $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ — прості числа. За ***китайською теоремою про остачі*** існує таке натуральне число m, що $m \equiv p_k - k(\mathrm{mod}\,p_k^2)$, $k = \overline{1,n}$. Неважко переконатись, що числа $m + M + 1$, $m + M + 2$, ..., $m + M + n$, де $M = (p_1 p_2 \dots p_n)^2$, задовольняють умову задачі, бо для кожного k $m + M + k \equiv 0(\mathrm{mod}\,p_k)$, але ж $m + M + k \equiv p_k(\mathrm{mod}\,p_k^2)$, тобто $m + M + k \not\equiv 0(\mathrm{mod}\,p_k^2)$.■

Лема. Нехай b_1, b_2, ... b_m, більші від 1, — натуральні числа. Тоді існує таке натуральне число B, що кожне з чисел Bb_1, Bb_2, ..., Bb_m є ступенем деякого натурального числа з більшим від 1 натуральним показником.

Доведення. Позначимо через P_i сукупність всіх простих дільників числа b_i, $i = \overline{1,m}$. Нехай $\{p_1;\ p_2;\ \dots;\ p_s\} = \bigcup\limits_{i=1}^{m} P_i$. Тоді $b_i = p_1^{\alpha_{i1}} \cdot p_2^{\alpha_{i2}} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_{is}}$, $i = \overline{1,m}$ (тут α_{ij} — цілі невід'ємні числа, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,s}$). Візьмемо m довільних простих чисел $q_1 < q_2 < \dots < q_m$, і для кожного $j = \overline{1,s}$ розглянемо систему конгруенцій $x \equiv -\alpha_{ij}\,(\mathrm{mod}\,q_i)$, $i = \overline{1,m}$. За ***китайською теоремою про остачі*** така система має натуральний розв'язок X_j. Тоді, як легко побачити, число $B = p_1^{X_1} \cdot p_2^{X_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{X_s}$ задовольняє умову, оскільки $Bb_i = p_1^{X_1+\alpha_{i1}} \cdot p_2^{X_2+\alpha_{i2}} \cdot \ldots \cdot p_s^{X_s+\alpha_{is}}$, $q_i \left| X_j + \alpha_{ij}\right.$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,s}$.■

Із доведеної леми очевидним чином випливає такий відомий факт [24].

Задача 13. Довести, що існує скінченна арифметична прогресія довільної довжини, кожен член якої є ступенем деякого натурального числа з більшим від 1 натуральним показником.

Розглянемо також і дві олімпіадні задачі, які легко розв'язуються за допомогою такої леми.

Задача 14 (*Short List IMO*, 1992 р.). Нехай $n \geqslant 2$ — довільне натуральне число. Довести, що існує така множина $M \subset \mathrm{N} \backslash \{1\}$ з n елементів, за якої кожен елемент множини M і сума довільної кількості елементів цієї множини є ступенем деякого натурального числа з більшим від 1 натуральним показником.

Розв'язання. Візьмемо довільні натуральні числа $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, більші від 1, і розглянемо також різні суми чисел цієї сукупності — усього $m = 2^n - 1$ чисел (серед яких можуть бути й рівні). Ці числа позначимо як $b_1, b_2, \dots, b_m$. Згідно з лемою існує таке натуральне число B, що кожне з чисел Bb_1, Bb_2, ..., Bb_m буде ступенем деякого натурального числа з більшим від 1 натуральним показником. Отже, множина $M = \{Ba_1;Ba_2;\dots;Ba_n\}$ задовольняє умову задачі.■

Задача 15 (*Балканська МО*, 2000 р.). Нехай $n \geqslant 2$ — довільне натуральне число. Довести, що існує така множина $M \subset \mathrm{N} \backslash \{1\}$ з n елементів, що кожен елемент множини M і середнє арифметичне будь-яких декількох елементів цієї множини є ступенем деякого натурального числа з більшим від 1 натуральним показником.

Розв'язання. Нехай $c_1 < c_2 < \dots < c_n$ — більші від 1 довільні натуральні числа. Візьмемо $a_j = n!c_i$, $i = \overline{1,n}$, і застосуємо міркування з попередньої задачі.■

Задача 16 (П. Ердьош) [24]. Довести, що існує безліч непарних натуральних k, для кожного з яких числа $2^n + k$ є складеними для всіх $n \in \mathrm{N}$.

Розв'язання. Відомо, що $2^{32}+1=641\cdot p$, де $p>2^{16}+1$ — просте число. Оскільки $(p;2^{32}-1)=1$, то за ***китайською теоремою про остачі*** існує безліч натуральних чисел $k>p$, для яких одночасно мають місце конгруенції $k\equiv 1(\mathrm{mod}2)$, $k\equiv -1(\mathrm{mod}p)$, $k\equiv 1(\mathrm{mod}641\cdot(2^{32}-1))$. Множину всіх таких k позначимо через K.

Доведемо спочатку, що для всіх $k\in K$ кожне з чисел $2^q k+1$, $q\in\mathrm{N}$ ділиться без остачі принаймні на одне з шести простих чисел $2^{2^0}+1,\ 2^{2^1}+1,\ 2^{2^2}+1,\ 2^{2^3}+1,\ 2^{2^4}+1,\ p$. Подамо число q у вигляді $q=2^m(2t+1)$, де $m\geqslant 0$, $t\geqslant 0$ — цілі. Оскільки $k\equiv 1(\mathrm{mod}(2^{32}-1))$, то

$$2^q k+1\equiv 2^{2^m(2t+1)}+1\left(mod\left(2^{32}-1\right)\right).$$

Для $m=\overline{0,4}$ $2^{2^m}+1\left|2^{32}-1\right.$ і $2^{2^m}+1\left|2^{2^m(2t+1)}+1\right.$, а тому із останньої конгруенції випливає, що $2^{2^m}+1\left|2^q k+1\right.$. Оскільки $2^q k+1>k>p>2^{2^4}+1$, то $2^{2^m(2t+1)}k+1$ для $m=\overline{0,4}$ — число складене. Тепер візьмемо $m\geqslant 6$. Тоді $q=2^6u$, $u\in$ і $2^q k+1\equiv 2^{2^6 u}\cdot(-1)+1(\mathrm{mod}p)$. Оскільки $p\left|2^{2^5}+1\right.$, то $p\left|2^{2^6}-1\right.$, і тому $p\mid 2^q k+1$, причому $2^q k+1>k>p$, і $2^q k+1$ — складене число.

Доведемо тепер, що всі $k\in K$ задовольняють умову задачі, тобто 2^n+k є складеним числом для будь-яких $k\in K$ та $n\in\mathrm{N}$. Враховуючи, що $k>p$, достатньо показати, що 2^n+k ділиться без остачі принаймні на одне з шести простих чисел

$$2^{2^0}+1<2^{2^1}+1<2^{2^2}+1<2^{2^3}+1<2^{2^4}+1<p.\quad (*)$$

Нехай $S=p\cdot\prod_{i=0}^{4}\left(2^{2^i}+1\right)$. За теоремою Ейлера, $2^{\varphi(S)}\equiv 1(\mathrm{mod}S)$, а тому, за доведеним вище, для будь-яких $n\in\mathrm{N}$ і $k\in K$ існує таке число γ із сукупності (*), що $2^{n(\varphi(S)-1)}k+1\equiv 0(\mathrm{mod}\gamma)$, $2^{n(\varphi(S)-1)}k+2^n\equiv 0(\mathrm{mod}\gamma)$. Оскільки $2^{\varphi(S)}\equiv 1(\mathrm{mod}S)$, то $2^{\varphi(S)}\equiv 1(\mathrm{mod}\gamma)$, $2^{n\varphi(S)}\equiv 1(\mathrm{mod}\gamma)$, то $2^n+k\equiv 0(\mathrm{mod}\gamma)$, причому $2^n+k>k>\gamma$.■

Нехай $f(x)$ — многочлен з цілими коефіцієнтами, $m=m_1\ldots m_s$, причому $m_i>1$, $i=\overline{1,s}$, $(m_i;m_j)=1$, $1\leqslant i<j\leqslant s$. Тоді, зрозуміло, конгруенція $f(x)\equiv 0(\mathrm{mod}m)$ еквівалентна системі конгруенцій $f(x)\equiv 0(\mathrm{mod}m_i)$, $i=\overline{1,s}$. Якщо $x\equiv x_i(\mathrm{mod}m_i)$ — розв'язок конгруенції $f(x)\equiv 0(\mathrm{mod}m_i)$, $i=\overline{1,s}$, то, згідно з ***китайською теоремою про остачі***, система лінійних конгруенцій $x\equiv x_i(\mathrm{mod}m_i)$, $i=\overline{1,s}$ має єдине розв'язання (клас лишків за $\mathrm{mod}m$), яке задовольняє конгруенцію $f(x)\equiv 0(\mathrm{mod}m)$. Якщо N_i, $i=\overline{1,s}$ — кількість розв'язань відповідних конгруенцій цієї системи, то кількість розв'язків конгруенції $f(x)\equiv 0(\mathrm{mod}m)$ становить $N_1\ldots N_s$.

Задача 17 (*Short List IMO*, 1998 р.). Знайти всі $n\in\mathrm{N}$, для яких існують такі натуральні m, що m^2+9 ділиться без остачі на 2^n-1.

Розв'язання. Нехай $2^n-1\mid m^2+9$ для деяких натуральних m і n. Доведемо, що $n=2^k$, $k\in\mathrm{N}$. Припустимо супротивне і подамо число n у вигляді $n=2^k s$, $s>1$ — непарне. Тоді $m^2\equiv -9(\mathrm{mod}\ 2^s-1)$. Зауважимо, що $2^s-1\not\equiv 0(\mathrm{mod}3)$ для непарного s. Обчислимо символ Якобі-Лежандра [5, 9]:

$$\left(\frac{-9}{2^s-1}\right)=\left(\frac{-1}{2^s-1}\right)\left(\frac{3^2}{2^s-1}\right)=\left(\frac{-1}{2^s-1}\right)\cdot 1=(-1)^{(2^s-1-1)/2}=(-1)^{2^{s-1}-1}=-1.$$

А втім, як відомо, якщо для непарного m конгруенція $x^2\equiv a(\mathrm{mod}m)$ має розв'язання, то символ Якобі $\left(\frac{a}{m}\right)$ дорівнює 1. До речі, нагадаємо, що на відміну від символу Лежандра для квадратичних конгруенцій за *простим* непарним модулем [5, 9], символ Якобі-Лежандра може дорівнювати 1 й у випадку, коли відповідна конгруенція не має розв'язань. Неважко пересвідчитись, що конгруенція $x^2\equiv 2(\mathrm{mod}15)$ не має розв'язань, хоча, за властивостями символу Якобі-Лежандра,

$$\left(\frac{2}{15}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\right)=(-1)^{(3^2-1)/8}\cdot(-1)^{(5^2-1)/8}=1.$$

Зауважимо, що суперечність можна одержати й шляхом стандартних міркувань за допомогою Малої теореми Ферма. Оскільки $2^s-1\equiv -1(\mathrm{mod}4)$, то число 2^s-1 має простий дільник $p\equiv -1(\mathrm{mod}4)$. Якщо $p>3$, то $(m;p)=1$, і

$$1\equiv m^{p-1}=\left(m^2\right)^{(p-1)/2}\overset{\mathrm{mod}p}{\equiv}(-9)^{(p-1)/2}\cdot 3^{p-1}=-1\cdot 3^{p-1}\overset{\mathrm{mod}p}{\equiv}-1,$$

що неможливо. Залишається зважати на те, що для непарних натуральних s $2^s\equiv -1(\mathrm{mod}3)$.

Візьмемо тепер $n=2^k$, $k\in\mathrm{N}$. Тоді $2^n-1=\prod_{p=0}^{k-1}\left(2^{2^p}+1\right)$. Усі множники в цьому добутку попарно взаємно прості. Насправді, якщо числа $2^{2^Q}+1$ і $2^{2^R}+1$, $Q>R$ діляться без остачі на просте число $\delta>2$, то, зрозуміло, $2^{2^R}\left(2^{2^Q-2^R}-1\right)\vdots\delta$, $2^{2^R\left(2^{Q-R}-1\right)}-1\vdots\delta$, що неможливо, оскільки, за припущенням, $2^{2^R}\equiv -1(\mathrm{mod}\delta)$, і тому $2^{2^R\left(2^{Q-R}-1\right)}\equiv -1(\mathrm{mod}\delta)$.

Покажемо тепер, що знайдеться таке натуральне x, що $x^2+9 \vdots 2^{2^p}+1$ для всіх $p=\overline{0,\,k-1}$. За ***китайською теоремою про остачі*** існує таке $y\in\mathrm{N}$, що $y\equiv 2^{2^{p-1}}\left(\mathrm{mod}\,2^{2^p}+1\right)$, $p=\overline{1,\,k-1}$.

Тоді для $p=\overline{1,\,k-1}$ $y^2\equiv 2^{2^p}\left(\mathrm{mod}\,2^{2^p}+1\right)$, $y^2+1\equiv 0\left(\mathrm{mod}\,2^{2^p}+1\right)$. Звідси випливає, що $(3y)^2+9\equiv 0(\mathrm{mod}\,2^n-1)$.■

Зауваження. Числа виду $F_k=2^{2^k}+1$, $k\in\mathrm{Z}$, $k\geqslant 0$ називають числами Ферма. Легко помітити, що має місце рівність $F_{k+1}=F_0\cdot F_1\ldots\cdot F_k+2$, з якої випливає, зокрема, що $(F_i;F_j)=1$, $i\neq j$.

Задача 18 [31]. З якої найбільшої кількості членів може складатись арифметична прогресія натуральних чисел з різницею 12, якщо відомо, що добуток усіх її членів є дільником деякого числа вигляду n^2+1, $n\in\mathrm{N}$?

Розв'язання. Неважко бачити, що така прогресія може складатись не більше, ніж із 6 членів. Насправді, жоден із її членів не може ділитись без остачі на 7, оскільки $n^2\not\equiv-1(\mathrm{mod}\,7)$. А тому із 7 послідовних членів прогресії можна було б обрати два такі, різниця яких ділилась би без остачі на 7, що неможливо, бо така різниця повинна була б мати вигляд $12k$, $1\leqslant k\leqslant 6$. Доведемо тепер, що 6-членна прогресія 5, 17, 29, 41, 53, 65 задовольняє умову задачі. Для цього покажемо, що конгруенція

$$x^2\equiv-1(\mathrm{mod}\ 25\cdot 17\cdot 29\cdot 41\cdot 53\cdot 13)\quad (*)$$

має розв'язки. Конгруенція $x^2\equiv-1(\mathrm{mod}\ 25)$, очевидно, має розв'язання $(7^2+1\equiv 0(\mathrm{mod}\ 25))$. Кожне з простих чисел 13, 17, 29, 41, 53 дає остачу 1 за mod4, а тому, як відомо [1, 5, 8, 10, 25], число -1 є квадратичним лишком за цими модулями. Нехай r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 — розв'язки конгруенції $x^2\equiv-1$ за модулями $m_1=25$, $m_2=17$, $m_3=29$, $m_4=41$, $m_5=53$, $m_6=13$ відповідно. Розв'язання системи конгруенцій $x\equiv r_i(\mathrm{mod}\,m_i)$, $i=\overline{1,\,6}$ і буде потрібним розв'язанням конгруенції (*).■

Зауваження. Хоча для конгруенції $x^2\equiv-1(\mathrm{mod}\ 25)$ розв'язання було легко знайти, але варто запропонувати читачеві самостійно довести методом математичної індукції таке нескладне твердження.

Лема. Нехай $p>2$ — просте число, і $(a;p)=1$. Тоді із розв'язання конгруенції $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\,p)$ випливає розв'язання конгруенції $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\,p^k)$ для будь-якого $k\in\mathrm{N}$, тобто якщо a є квадратичним лишком за mod$p$, то всі конгруенції $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\,p^k)$, $k\in\mathrm{N}$ мають по два розв'язання.

Вказівка. Якщо $x\equiv\beta(\mathrm{mod}\,p^k)$ — розв'язок конгруенції $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\,p^k)$, $t\equiv t_0(\mathrm{mod}\,p)$ — розв'язок конгруенції $2\beta t+\frac{\beta^2-a}{p^k}\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$, то $x\equiv\beta+p^kt_0(\mathrm{mod}\,p^{k+1})$ — розв'язок конгруенції $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\,p^{k+1})$.

Задача 19 (*Китайська МО*, 2008 р.). Нехай $n>1$ — задане натуральне число, і нескінченна множина $A\subset\mathrm{N}$ задовольняє таку умову: для кожного простого числа p, яке не є дільником n, серед елементів множини A існує безліч таких, що не діляться без остачі на p. Довести, що для будь-якого натурального $m>1$, взаємно простого з n, можна обрати скінченну підмножину множини A, сума елементів якої ділиться без остачі на n і дає остачу 1 від ділення на m.

Розв'язання. Нехай $m=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ — канонічний розклад числа m. Позначимо через A_1 нескінченну підмножину множини A, всі елементи якої взаємно прості з p_1. Існує безліч таких елементів множини A_1, що мають однакову остачу (позначимо її a) за modmn. Очевидно, що $a\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,p_1)$ (якщо $x-a \vdots mn$, $a \vdots p_1$, то $x \vdots p_1$). Нехай $A_2=\{x\in A_1 \mid x\equiv a(\mathrm{mod}\,mn)\}$. За ***китайською теоремою про остачі*** існує натуральне q, що задовольняє умови $q\equiv\tilde{a}\left(\mathrm{mod}\,p_1^{\alpha_1}\right)$, $q\equiv 0\left(\mathrm{mod}\,mnp_1^{-\alpha_1}\right)$, де $\tilde{a}$ — таке натуральне число, що $a\tilde{a}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,p_1^{\alpha_1}\right)$. Оберемо в множині A_2 q елементів, сукупність яких позначимо B_1. Тоді, як неважко бачити, $\sum\limits_{u\in B_1}u\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,p_1^{\alpha_1}\right)$, $\sum\limits_{u\in B_1}u\equiv 0\left(\mathrm{mod}\,mnp_1^{-\alpha_1}\right)$. Аналогічну процедуру реалізуємо послідовно для p_2, p_3, ..., p_k, причому чергову множину B_i, $i=\overline{2,\,k}$, можна обрати так, щоб $B_i\subset A\backslash\bigcup\limits_{j=1}^{i-1}B_j$. Множина $B_i=\bigcup\limits_{i=1}^{k}B_i$, як легко пересвідчитись, задовольняє потрібні умови.■

Нагадаємо важливе теоретико-числове поняття, яке використовується під час розв'язування багатьох складних задач, у тому числі й «олімпіадних».

Нехай $a>1$ і $m>1$ — *взаємно прості* натуральні числа. ***Показником числа*** a за mod$m$ називається число $P_m(a)=\min\left\{k\in\mathrm{N}\,\middle|\,a^k\equiv 1(\mathrm{mod}\,m)\right\}$ (оскільки $a^{\varphi(m)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,m)$, то такий ***показник*** завжди існує).

Зрозуміло, що $P_m(a)\leqslant\varphi(m)$, де φ — функція Ейлера.

Лема. Якщо $a^n\equiv 1(\mathrm{mod}\,m)$, то $P_m(a)\mid n$ (зокрема, $P_m(a)\mid\varphi(m)$).

Доведення. Припустимо, що $n=P_m(a)t+r$, $0<r<P_m(a)$. Тоді $a^r\equiv 1(\mathrm{mod}\,m)$, що неможливо.■

Лема. Числа a^1, a^2, ..., $a^{P_m(a)}$ дають попарно різні остачі за mod$m$.

Доведення. Якщо $a^i \equiv a^j(\mathrm{mod}\,m)$, $1 \leqslant i < j \leqslant P_m(a)$, то $a^i(a^{j-i}-1) \equiv 0(\mathrm{mod}\,m)$, і тому $a^{j-i} \equiv 1(\mathrm{mod}\,m)$, $0 \leqslant j-i \leqslant P_m(a)$. Отримали суперечність.■

Якщо $m = q$ — просте число, то класи лишків (за mod$q$) $\overline{a^1}$, $\overline{a^2}$, ..., $\overline{a^{P_q(a)}}$ дають всі розв'язки конгруенції $x^{P_q(a)} \equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$. Насправді, ці класи лишків задовольняють дану конгруенцію. Залишається скористатись відомим фактом (теорема Лагранжа): якщо q — просте число і $f(x) = a_k x^k + ... + a_1 x + a_0$ — многочлен ступеня k з цілими коефіцієнтами, причому $(a_k;q) = 1$, то конгруенція $f(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\,q)$ має не більше від k розв'язків (пропонуємо читачам довести теорему самостійно; див., наприклад, [5]). Зазначимо, що для складених модулів теорема Лагранжа не справджується: наприклад, конгруенція $x^2 - 3x + 2 \equiv 0(\mathrm{mod}\,6)$ має чотири розв'язки: $\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}$.

Якщо $P_m(a) = \varphi(m)$, то число a називається ***примітивним коренем*** за mod$m$, або ж ***примітивним коренем*** конгруенції $x^{\varphi(m)} \equiv 1(\mathrm{mod}\,m)$.

Примітивні корені існують не для всіх натуральних $m > 1$. Існування примітивних коренів за довільним простим модулем вперше повністю обґрунтував Лежандр [10, с. 60]. Формулювання цього факту зустрічається в роботах німецького математика Ламберта. Намагався довести дану теорему й Леонард Ейлер. Пізніше Гаусс запропонував декілька нових доведень існування примітивних коренів за простим модулем.

Теорема. Якщо p — просте число, то конгруенція $x^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$ має $\varphi(p-1)$ ***примітивних коренів***, тобто існує рівно $\varphi(p-1)$ таких класів лишків x за mod$p$, що $x^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$, але $x^u \not\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$ для всіх натуральних $u < p-1$.

Для читачів, знайомих з початками теорії груп [2, 16, 23], зупинимось тут на надзвичайно корисному й цікавому обговоренні цієї теореми з теоретико-групової точки зору.

Для кільця Z_m усіх класів лишків за mod$m$ розглядається так звана *мультиплікативна* (тобто за операцією множення за mod$m$) *група* $R(m)$ класів, взаємно простих з m (для ненульового класу a обернений елемент (клас) a^{-1} визначається як єдине розв'язання конгруенції $ax \equiv 1(\mathrm{mod}\,m)$). Як бачимо, така група складається з $\varphi(m)$ елементів (кількість елементів групи називається її *порядком*). Якщо $m = p$ — просте число, то Z_p, як відомо, є полем, і його мультиплікативна група $R(p)$ утворюється всіма ненульовими класами $\overline{1}_p, ..., \overline{p-1}_p$, і часто позначається символом Z^*_p (в теорії полів мультиплікативна група всіх ненульових елементів поля K зазвичай позначається K^*).

Якщо в скінченній групі G (групову операцію зручно позначати так само, як і «звичайне» множення; через e часто позначають *нейтральний* елемент відносно такого «множення», тобто «аналог» одиниці, вважається, що $a^0 = e$, і мають місце основні властивості піднесення до ступеня, в тому числі з цілим від'ємним показником; у групі Z^*_p нейтральним елементом буде клас лишків. Є такий елемент a, що для будь-якого $g \in G$ існує таке ціле $m \geqslant 0$, що $g = a^m$, то кажуть, що група G *породжується* своїм елементом a. Такі групи мають назву *циклічних*, а елемент, що породжує циклічну групу, називається *твірним* (до речі, в теорії груп розглядаються також і нескінченні циклічні групи). Зрозуміло, що для кожного елемента g в скінченній групі G можна визначити $\rho_G(g) = \min\{m \in \mathrm{N} \mid g^m = e\}$ — порядок цього елемента в групі.

Неважко довести, що порядок циклічної групи співпадає з порядком її твірного елемента. Якщо циклічна група G породжується твірним елементом g порядку n ($n = \rho_G(g)$), то $G = \{e; g^1; ...; g^{n-1}\}$.

Пропонуємо читачам самостійно довести такі нескладні твердження.

а) Якщо $\rho_G(g) = n$, то для $m \in \mathrm{N}$ $g^m = e$ тоді й тільки тоді, коли $n \mid m$.

б) Якщо $\rho_G(g) = n$, $m \in \mathrm{N}$, то $(m;n) \cdot \rho_G(g^m) = n$.

в) Якщо $G = \{e; g^1; ...; g^{n-1}\}$ — циклічна група порядку n, то g^k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, буде її твірним елементом тоді й тільки тоді, коли $(k;n) = 1$ (відтак, циклічна група порядку n має $\varphi(n)$ твірних елементів).

г) Будь-яка *підгрупа* циклічної групи також буде циклічною.

д) Якщо $G = \{e; g^1; ...; g^{n-1}\}$ — циклічна група порядку n з твірним елементом g, то всі її підгрупи вичерпуються підгрупами вигляду $H_d = \left\{ \left(g^d\right)^j \middle| 1 \leq j \leq \frac{n}{d} \right\}$, d — довільний натуральний дільник числа n, причому якщо d_1 та d_2 — різні дільники, то $H_{d_1} \neq H_{d_2}$.

Доречно згадати, що для скінченних груп має місце дуже важлива теорема Лагранжа: порядок будь-якої підгрупи даної групи G є дільником порядку G (доведення цієї теореми не є складним; див., наприклад, [2]). Зокрема, з цієї теореми відразу випливають такі факти (доведіть їх самостійно):

а) порядок будь-якого елемента в групі є дільником порядку групи;

б) група простого порядку є циклічною і породжується будь-яким своїм елементом, відмінним від нейтрального.

У теорії чисел часто використовується (в тому числі — як елемент техніки «підсумовування по дільниках») функція Мебіуса $\mu : \mathrm{N} \to \{-1;0;1\}$, яка визначається так: $\mu(1) = 1$; $\mu(n) = (-1)^s$, якщо канонічний розклад числа $n > 1$ має вигляд $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_s$, $p_1 < \ldots < p_s$ — прості числа; $\mu(n) = 0$ для решти натуральних n.

Доведіть самостійно такі властивості (доведення можна знайти в багатьох підручниках з теорії чисел, у тому числі й у [5]):

а) $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ для кожного натурального $n > 1$;

б) якщо для довільної функції $f : \mathrm{N} \to \mathrm{R}$ через $F(n)$ позначити суму $\sum_{d|n} f(d)$, то $\sum_{d|n} F\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d) = f(n)$ (правило обернення).

Отже, питання про існування примітивних коренів за модулем m зводиться до дослідження щодо циклічності групи $R(m)$ (тобто щодо наявності в цій групі елементів порядку $\varphi(m)$).

Доведемо тепер, що в мультиплікативній групі Z^*_p існують елементи порядку $p-1$, причому таких елементів буде $\varphi(p-1)$.

Випадок $p = 2$ є тривіальним. Нехай $p > 2$. Спочатку зауважимо, що за умови $d \mid p-1$ (тобто $p - 1 = d \cdot \delta$, $d \in \mathrm{N}$, $\delta \in \mathrm{N}$) конгруенція $x^d \equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$ має рівно d розв'язків. Насправді, існує такий многочлен $h(x)$ з цілими коефіцієнтами, що $\deg h(x) = (p-1) - d$ і $x^{p-1} - 1 = \left(x^d\right)^{\delta} - 1 = \left(x^d - 1\right)h(x)$. Якщо конгруенція $x^d \equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$ має менше від d розв'язків, то кількість розв'язків конгруенції $x^{p-1} - 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$ буде меншою від $d + ((p-1) - d) = p - 1$, що неможливо, оскільки остання конгруенція має, згідно з Малою теоремою Ферма, рівно $p-1$ розв'язків.

Скориставшись означенням, легко перевірити, що d класів лишків, які є розв'язанням конгруенції $x^d \equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$, утворюють групу — підгрупу $\mathrm{Z}^*_p(d)$ порядку d в групі Z^*_p. Позначимо через $\psi(k)$ кількість елементів порядку k в групі Z^*_p. Тоді, оскільки порядок кожного елемента в $\mathrm{Z}^*_p(d)$ є дільником числа d, маємо рівність: $\sum_{k|d} \psi(k) = d$. Звідси, за правилом обернення, $\psi(d) = \sum_{k|d} \mu(k)\frac{d}{k}$. Застосуємо правило обернення для тотожності Гаусса $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ [5, 9] і одержимо рівність: $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d}$. Відтак, $\psi(d) = \varphi(d)$ для будь-якого $d \mid p-1$. Зокрема, $\psi(p-1) = \varphi(p-1) \geqslant 2$, чим і завершується доведення.■

Зауваження. Незначна модифікація такого доведення дозволяє цілком аналогічно отримати важливе узагальнення цієї теореми: мультиплікативна група K^* будь-якого скінченного поля K циклічна. Пропонуємо читачам зробити це самостійно.

Ейлер не володів доведенням циклічності групи Z^*_p, але ж, ґрунтуючись на такому припущенні, красиво довів, що для будь-якого простого $p \equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$ конгруенція $x^2 \equiv 2(\mathrm{mod}\,p)$ має розв'язки. Нехай a — примітивний корінь за $\mathrm{mod}\,p$, тоді $b = a^{(p-1)/8}$ має в групі Z^*_p порядок $\frac{p-1}{(p-1;\,(p-1)/8)} = 8$. Отже, $b^8 - 1 = (b^4 - 1)(b^4 + 1) \equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$ і, оскільки $b^4 \not\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$, маємо в полі Z_p: $b^4 = -1$, $b^2 + b^{-2} = 0$, $\left(b + b^{-1}\right)^2 = b^2 + b^{-2} + 2 = 2$. Відтак, клас лишків $\overline{2}$ в полі Z_p є квадратом, тобто квадратичним лишком.

Завдяки використанню цієї ідеї читачі можуть самостійно довести такий результат (див. [1, с. 92]).

Лема. Квадратичний характер числа 2 за простим модулем p визначається таким співвідношенням для символу Лежандра: $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\left(p^2-1\right)/8}$.

За [1] читачі зможуть познайомитись із доведеннями квадратичного закону взаємності $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}\left(\frac{q}{p}\right)$ (p і q — непарні прості) та різних його узагальнень, які експлуатують ідею Ейлера.

Гаусс у роботі «Disquisitiones Arithmeticae» отримав загальний результат, яким описуються всі модулі, для яких існують примітивні корені (а відтак і всі мультиплікативні групи $R(m)$, які є циклічними).

Теорема (Гаусс). Конгруенція $x^{\varphi(m)} \equiv 1(\mathrm{mod}\,m)$ має ***примітивні корені*** тільки для $m = 2$, $m = 4$ і для всіх m вигляду p^α, $2p^\alpha$, де $p > 2$ — просте число, α — довільне натуральне число (тобто для інших m примітивних коренів не існує). Для кожного з таких m існує рівно $\varphi(\varphi(m))$ примітивних коренів.

З доведенням цієї витонченої теореми елементарної теорії чисел можна познайомитись, наприклад, за книжками [1, 5]. Втім пропонуємо читачам самостійно отримати цей результат, довівши такі леми.

Лема. Показник непарного числа a за $\mathrm{mod}\,2^\alpha$, $\alpha \geqslant 3$ не перевищує $\frac{1}{2}\varphi\left(2^\alpha\right) = 2^{\alpha-2}$.

Вказівка. Скористайтесь методом математичної індукції.

Лема. Якщо $m > 4$ і не є числом вигляду p^α, $2p^\alpha$, де p — непарне просте число, то для будь-якого взаємно простого з m числа $a > 1$ справджується конгруенція $a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$ (і це означатиме, зокрема, що за $\mathrm{mod}\, m$ примітивних коренів немає, і відповідна група $R(m)$ не є циклічною).

Лема. Нехай a — примітивний корінь за простим непарним модулем p. Тоді існують такі натуральні числа t і u, $u \not\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$, що $(a+pt)^{p-1} = 1 + pu$.

Лема. Число $a+pt$ із попередньої леми є примітивним коренем за $\mathrm{mod}\, p^{\alpha}$ для кожного натурального $\alpha \geqslant 2$.

Вказівка. Для будь-якого цілого $k \geqslant 0$ число $(a+pt)^{p^k(p-1)}-1$ ділиться без остачі на p^{k+1}, але не ділиться на p^{k+2}.

Лема. Нехай a — примітивний корінь за $\mathrm{mod}\, p^{\alpha}$, де p — непарне просте число. Тоді те з чисел a і $a+p^{\alpha}$, яке є непарним, буде примітивним коренем також і за $\mathrm{mod}\, 2p^{\alpha}$.

Задача 20 (*Short List IMO*, 2004 р.). Для натурального $n > 1$ позначимо через P_n добуток усіх таких натуральних $x < n$, що $x^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\, n)$. Для кожного $n > 1$ визначити остачу від ділення числа P_n на n.

Розв'язання. Для $n = 2$ $P_n = 1$. Нехай $X_n = \{x \in \mathrm{N} \mid x \leq n-1,\ x^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\, n)\}$. Тоді $(x;n) = 1$ для кожного $x \in X_n$. Оскільки $\{1;n-1\} \subset X_n$, то будемо спочатку вважати, що $|X_n| \geqslant 3$. Візьмемо $x_1 \in X_n \setminus \{1\}$, і позначимо $A_1 = \{1;x_1\}$. Далі, нехай $x_2 \in X_n \setminus A_1$, $A_2 = A_1 \cup \{x_2;\, x_1x_2\}$. Тут і надалі добутки розглядаються за $\mathrm{mod}\, n$, тобто символом x_1x_2 позначається елемент множини X_n, який є конгруентним за $\mathrm{mod}\, n$ «звичайному» добуткові чисел x_1 та x_2 (такий елемент, очевидно, у множині X_n існує). Множина A_2 містить 4 елементи і є замкненою відносно множення за $\mathrm{mod}\, n$. Припустимо, що для деякого $k > 1$ ми побудували замкнену відносно множення за $\mathrm{mod}\, m$ 2^k елементну множину $A_k \subset X_n$. Якщо $A_k \neq X_n$, то оберемо $x_{k+1} \in X_n \setminus A_k$ і покладемо $A_{k+1} = A_k \cup \{xx_{k+1} \mid x \in A_k\}$. Зауважимо, що $A_k \cap \{xx_{k+1} \mid x \in A_k\} = \varnothing$, і тому $|A_{k+1}| = 2^{k+1}$. Оскільки множина X_n скінченна, то для деякого натурального m $X_n = A_m$. Отже, як неважко довести індукцією, $\prod_{x \in A_k} x \equiv 1(\mathrm{mod}\, n)$ для всіх $k \geqslant 2$, то $P_n \equiv 1(\mathrm{mod}\, n)$.

З'ясуємо тепер, для яких n $|X_n| \geqslant 3$. Нехай $n = ab$, де $a > 2$ і $b > 2$ — взаємно прості натуральні числа. За ***китайською теоремою про остачі*** існують такі натуральні $x \in [1;\, n-1]$ і $y \in [1;\, n-1]$, що $x \equiv 1(\mathrm{mod}\, a)$, $x \equiv -1(\mathrm{mod}\, b)$, $y \equiv -1(\mathrm{mod}\, a)$, $y \equiv 1(\mathrm{mod}\, b)$. Оскільки $x^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\, n)$, $y^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\, n)$, то $x \in X_n$ і $y \in X_n$. Відтак, множина X_n матиме щонайменше три елементи (очевидно, що з-поміж чисел 1, x і y жодні два не є конгруентними за $\mathrm{mod}\, n$). Аналогічно, якщо $n = 2^k$, $k \in \mathrm{N} \setminus \{1;2\}$, то $\{1;2^{k-1}-1;\ 2^{k-1}+1;\ 2^k-1\} \subseteq X_n$. Для $n = 4$ $|X_n| = 2$. Якщо $n = \varepsilon p^k$, $k \in \mathrm{N}$, $\varepsilon \in \{1;2\}$, $p > 2$ — просте число, то з конгруенції $x^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\, n)$ випливає, що або $x \equiv 1(\mathrm{mod}\, n)$, або $x \equiv -1(\mathrm{mod}\, n)$.

Отже, для $n = 2$, $n = 4$, $n = p^k$, $n = 2p^k$, де $k \in \mathrm{N}$, $p > 2$ — просте число, $X_n = \{1;n-1\}$ і $P_n = n-1$. Для решти натуральних $n > 1$ $P_n = 1$.■

Як бачимо, відповідь у задачі залежить від того, чи існують за $\mathrm{mod}\, n$ примітивні корені.

Зміст розібраної задачі безпосередньо пов'язаний із загальною теорією n-ступеневих лишків — розв'язань двочленних конгруенцій $x^n \equiv a(\mathrm{mod}\, m)$, $(a;m) = 1$.

В даній публікації ми не ставили мету докладно висвітлити цей розділ теорії чисел. Зупинимось тільки на деяких питаннях. Але тим, хто прагне досягти високих результатів у математичних змаганнях, наполегливо радимо опрацювати теорію n-ступеневих лишків за систематичними підручниками та збірниками задач [5, 9, 12, 18].

Доведемо такий факт.

Теорема. Нехай за $\mathrm{mod}\, m$ існують примітивні корені, натуральні числа a і m взаємно прості. Конгруенція $x^n \equiv a(\mathrm{mod}\, m)$ має розв'язки тоді й тільки тоді, коли $a^{\varphi(m)/d} \equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$, де $d = (n;\varphi(m))$. Якщо ця конгруенція має розв'язки, то їхня кількість дорівнює d.

Доведення. Нехай g — примітивний корінь за $\mathrm{mod}\, m$, $g^b \equiv a(\mathrm{mod}\, m)$ (таке натуральне b називається *індексом* числа (класу лишків) a за основою g і позначається $\mathrm{ind}_g a$ (теоретико-числовий аналог логарифма); неважко переконатись у тому, що відображення $a \mapsto \mathrm{ind}_g a$ породжує ізоморфізм мультиплікативної групи $R(m)$ кільця Z_m і адитивної групи всіх класів лишків за $\mathrm{mod}\, \varphi(m)$; з теорією індексів та технікою їхнього використання для дослідження ступеневих лишків можна познайомитись за [5]). Якщо зробити заміну $x \equiv g^y(\mathrm{mod}\, m)$, то матимемо, що

$$x^n \equiv a(\mathrm{mod}\, m) \Leftrightarrow g^{ny} \equiv g^b(\mathrm{mod}\, m) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ny \equiv b(\mathrm{mod}\, \varphi(m)).$$

Остання конгруенція, як відомо, має розв'язки тоді й тільки тоді, коли $d \mid b$, причому розв'язань буде саме d. Якщо $d \mid b$, то $a^{\varphi(m)/d} \overset{\mathrm{mod}\, m}{\equiv} g^{b\varphi(m)/d} \overset{\mathrm{mod}\, p}{\equiv} 1$. Якщо ж $a^{\varphi(m)/d} \equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$, то $g^{b\varphi(m)/d} \equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$, а тому $b\varphi(m)/d$ ділиться без остачі на $\varphi(m)$, тобто $d \mid b$.■

Із доведеної теореми випливає, зокрема, що якщо за $\mathrm{mod}\, m$, $m > 2$ існують примітивні корені, то конгруенція $x^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$ має тільки два розв'язки (класи лишків $\overline{1}$ та $\overline{m-1}$ за $\mathrm{mod}\, m$). Насправді, для $m > 2$ $\varphi(m)$ — парне число, а тому $d = (2;\varphi(m)) = 2$. Це також випливає з доведеної вище леми щодо конгруенцій вигляду $x^2 \equiv a(\mathrm{mod}\, p^k)$, де $p > 2$ — просте число, $(a;p)=1$ та правила підрахунку кількості розв'язків конгруенції $f(x)\equiv 0(\mathrm{mod}\,m)$, де $m=m_1\cdot\ldots\cdot m_s$, $m_i>1$, $i=\overline{1,s}$, $(m_i;m_j)=1$, $1\leqslant i<j\leqslant s$.

Якщо $m=2^k$, то результат має інший характер.

Для $k=1$ і непарного a конгруенція $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\,2^k)$ має один розв'язок, для $k=2$ і $a\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ конгруенція $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\,2^k)$ має два розв'язки.

Задача 21. Довести, що для непарного a конгруенція $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\,2^k)$, $k\geqslant 3$, має розв'язки тоді й тільки тоді, коли $a\equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$, причому розв'язків існує рівно чотири.

Розв'язання. Необхідність умови $a\equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$ є очевидною. Отже, нехай виконується конгруенція $a\equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$. Конгруенція $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\,2^3)$ має чотири розв'язки: $\pm\overline{1}$, $\pm\overline{3}$ (усі непарні цілі x задовольняють її). Усі непарні x можна подати у вигляді $x=\pm(1+2^2u)$, де u «пробігає» всю множину Z. Серед них легко виділити всі такі x, для яких $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\,2^4)$. Такими x будуть усі $x=\pm(\alpha+2^3\nu)$, $\nu\in\mathrm{N}$, де $\alpha=1+4\cdot\dfrac{a-1}{8}$. Продовжуючи ці міркування, з'ясуємо, що існує таке ціле число γ, що множина всіх цілих x, для яких $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\,2^k)$, має вигляд

$$\left\{\pm\left(\gamma+2^{k-1}t\right)\middle|t\in\mathrm{Z}\right\}=\left\{\pm\left(\gamma+2^{k}s\right)\middle|s\in\mathrm{Z}\right\}\cup\left\{\pm\left(\gamma+2^{k-1}+2^{k}s\right)\middle|s\in\mathrm{Z}\right\}.$$

Тобто класи $\pm\overline{\gamma}$, $\pm\overline{\left(\gamma+2^{k-1}\right)}$ за $\mathrm{mod}\,2^k$ дають усі розв'язання конгруенції $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\,2^k)$.■

Зауваження. Хотіли б звернути увагу читачів на цікаву можливість легко вивести для довільного простого p теорію конгруенцій вигляду $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\,p^k)$, $(a;p)=1$, використовуючи подання чисел a та x в системі числення з основою p [9, с. 81].

Тепер зовсім легко визначити кількість $\lambda(a;m)$ розв'язків конгруенції $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\,m)$, $m>1$, $(a;m)=1$.

Вважатимемо, що число a є квадратичним лишком за будь-яким непарним простим модулем p, яке є дільником числа m (це — необхідна умова існування розв'язків). Позначимо через $s\geqslant 0$ кількість різних простих непарних дільників числа m, $\eta=\max\{k\geqslant 0\,|\,m\,\vdots\,2^k\}$. Тоді:

а) для $\eta\in\{0;1\}$ $\lambda(a;m)=2^s$;

б) для $\eta=2$ і $a\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ $\lambda(a;m)=2^{s+1}$ (для інших a розв'язків немає);

в) для $\eta\geqslant 3$ і $a\equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$ $\lambda(a;m)=2^{s+2}$ (для інших a розв'язків немає).

Звідси відразу випливає твердження задачі 20 (якщо за $\mathrm{mod}\,m$ не існує примітивних коренів, то сукупність усіх розв'язків конгруенції $x^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,m)$ розбивається на $\dfrac{1}{2}\lambda(1;m)$ пар класів лишків, у кожній з яких добуток конгруентний -1 за $\mathrm{mod}\,m$).

Задача 22 (*Санкт-Петербурзька МО*, 1990 р.). Нехай a_1, a_2, ..., a_m — цілі числа. Дано многочлен $f(x)$ з цілими коефіцієнтами, причому відомо, що для будь-якого $n\in\mathrm{Z}$ $f(n)$ ділиться без остачі хоча б на одне з чисел a_1, a_2, ..., a_m. Довести, що серед цих чисел можна обрати таке, що $f(n)$ буде ділитись на нього без остачі для всіх $n\in\mathrm{Z}$.

Розв'язання. Припустимо супротивне: для будь-якого i, $1\leqslant i\leqslant m$, існує таке $x_i\in\mathrm{Z}$, що $f(x_i)\,\overline{\vdots}\,a_i$. Розглянемо канонічні розклади чисел a_1, a_2, ..., a_m. Для кожного i, $1\leqslant i\leqslant m$ у розкладі числа a_i виділимо той із множників (позначимо його $p_i^{\alpha_i}$), на який не ділиться без остачі $f(x_i)$. Якщо для деяких індексів s і t, $1\leqslant s<t\leqslant m$ виявиться, що $p_s=p_t$, то з чисел $p_s^{\alpha_s}$, $p_t^{\alpha_t}$ залишимо найбільше. Отже, нехай залишилися числа q_1, ..., q_r, $r\leqslant m$. Зауважимо, що $(q_i;q_j)=1$, $i\neq j$. Оскільки $f(x_i)\,\overline{\vdots}\,q_i$, $i=\overline{1,r}$, то для будь-якого $k\in\mathrm{Z}$ $f(x_i+kq_i)\,\overline{\vdots}\,q_i$. За ***китайською теоремою про остачі*** існує таке ціле число u, що $u\equiv x_i(\mathrm{mod}\,q_i)$, $i=\overline{1,r}$. Отже, $f(u)\,\overline{\vdots}\,q_i$, $i=\overline{1,r}$, а тому $f(u)\,\overline{\vdots}\,a_i$, $i=\overline{1,r}$.■

Задача 23 (*Відбіркова олімпіада,* Румунія, 2001 р.). Нехай $n\in\mathrm{N}$, $n\geqslant 2$, і $f(x)=a_mx^m+\ldots a_1x+a_0$— многочлен ступеня $m\geqslant 2$ з цілими коефіцієнтами, причому відомо, що $(a_1;n)=1$, і коефіцієнти a_2, a_3, ..., a_m діляться без остачі на всі прості дільники числа n. Довести, що для будь-якого $k\in\mathrm{N}$ існує таке натуральне число c, що $f(c)$ ділиться без остачі на n^k.

Розв'язання. Спочатку розглянемо випадок, коли $n=p$ — просте число. Для $k=1$ достатньо зауважити, що конгруенція $a_1x+a_0\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$ має розв'язок. Припустимо, що ми знайшли таке x, що $f(x)\,\vdots\,p^k$, але $f(x)\,\overline{\vdots}\,p^{k+1}$. Маємо: $f(x+tp^k)=f(x)+mp^{k+1}+ta_1p^k$. Оскільки $f(x)=\ell p^k$, $(\ell;p)=1$, то оберемо таке t, що $a_1t+\ell\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$, і тоді, очевидно, $f(x+tp^k)\,\vdots\,p^{k+1}$.

Нехай тепер $n=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}$ — канонічний розклад числа n. За доведеним раніше, для кожного натурального i, $1\leqslant i\leqslant s$ існує таке x_i, що $f(x_i)\,\vdots\,p_i^{\alpha_i k}$. За потрібне c можна взяти натуральний розв'язок (а він існує згідно з ***китайською теоремою про остачі***) системи конгруенцій $x\equiv x_i\left(\mathrm{mod}\,p_i^{\alpha_i k}\right)$, $i=\overline{1,s}$.■

Задача 24 (*Відбіркова олімпіада*, Іран, 2004 р.). Нехай $f_1(x)$, ... $f_n(x)$ — довільні многочлени з цілими коефіцієнтами, відмінні від нуль-многочлена. Довести, що існує такий звідний над Z многочлен $g(x)$ з цілими коефіцієнтами, що кожен із многочленів $f_i(x)+g(x)$, $i=\overline{1,n}$ є незвідним над Z.

Розв'язання. Нехай $m=\max\limits_{1\le i\le n}\deg f_i(x)$, і подамо задані многочлени у вигляді $f_i(x)=a_{im}x^m+\ \ldots+a_{i1}+a_{i0}$, $i=\overline{1,n}$. Візьмемо таке ціле k, яке не є коренем жодного з цих многочленів, і оберемо такі прості числа $p_1<p_2<\ldots<p_n$, що $f_i(k)\,\vdots\!\!\!/\,p_i$, $i=\overline{1,n}$. Для кожного j, $1\leqslant j\leqslant m-1$, згідно з ***китайською теоремою про остачі***, існує таке ціле b_j, що $b_j\equiv -a_{sj}\left(\mathrm{mod}p_s^2\right)$, $s=\overline{1,n}$. А також візьмемо ціле b_m, що задовольняє систему конгруенцій $b_m\equiv p_s-a_{sm}\left(\mathrm{mod}p_s^2\right)$, $s=\overline{1,n}$.

Нехай $b_0=-\sum\limits_{j=1}^{m}k^jb_j$, $g(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}b_ix^i$. Тоді $f_i(x)+g(x)=\sum\limits_{j=0}^{m}\left(b_j+a_{ij}\right)x^m$. Оскільки $g(k)=0$, то многочлен $g(x)$ звідний над Z. Зауважимо, що $b_j+a_{ij}\equiv 0(\mathrm{mod}p_i)$ для $1\leqslant j\leqslant m$, $b_m+a_{im}\not\equiv 0(\mathrm{mod}p_i^2)$.

Далі

$$b_0+a_{i0}=a_{i0}-\sum_{j=1}^{m}k^jb_j\overset{\mathrm{mod}p_i}{\equiv}a_{i0}+ka_{i1}+\ldots+k^ma_{im}=f_i(k),$$

а тому $b_0+a_{i0}\not\equiv 0(\mathrm{mod}p_i)$. Згідно з ознакою Ейзенштейна [17, с. 234; 20, с. 37], для кожного $i=\overline{1,n}$ многочлен $f_i(x)+g(x)$ є незвідним над Z.■

Задача 25 (*Болгарська МО*, 2003 р.). Множину $C\subset$ N називатимемо *гарною*, якщо для кожного цілого k в множині C існують такі елементи a і b, $a\neq b$, що $(a+k;\ b+k)>1$. Довести, що якщо сума всіх елементів гарної множини C дорівнює простому числу $q>2$, то в множині C існує таке число c, що множина $C\setminus\{c\}$ також є *гарною*.

Розв'язання. Розглянемо множину W всіх простих чисел p, для яких існують такі $a\in C$ і $b\in C$, $a\neq b$, що $a\equiv b(\mathrm{mod}p)$. Через C_p позначатимемо сукупність усіх остач, які утворюються елементами множини C від ділення на p.

Нехай $W=\{p_1;p_2;\ldots;p_n\}$. Припустимо, що для кожного i, $1\leqslant j\leqslant n$ існує така остача $\alpha_i\in C_{p_i}$, що конгруенція $x\equiv\alpha_i(\mathrm{mod}p_i)$ має рівно один розв'язок у множині C. За ***китайською теоремою про остачі*** існує ціле k таке, що $k\equiv-\alpha_i(\mathrm{mod}p_i)$, $i=\overline{1,n}$. Візьмемо таке $p_j\in W$, що для деяких нерівних $a\in C$ і $b\in C$ $p_j\,|\,a+k$ і $p_j\,|\,b+k$. Але ж тоді $a\overset{\mathrm{mod}p_j}{\equiv}b\overset{\mathrm{mod}p_j}{\equiv}\alpha_j$, що неможливо.

Відтак існує таке просте $p\in W$, що кожне ціле $\alpha\in[0;p-1]$ зустрічається серед остач чисел множини C за mod$p$ щонайменше двічі. Якщо всі такі остачі зустрічаються рівно два рази, то $q\overset{\mathrm{mod}p}{\equiv}2(0+1+\ldots+p-1)=p(p-1)$, що неможливо, оскільки число q просте. Отже, існує остача, яка утворюється принаймні три рази. Одне з чисел (позначимо його c), що дає цю остачу, можна вилучити з множини C. Насправді, для будь-якого $k\in$ Z можна взяти числа $a\in C\setminus\{c\}$, $b\in C\setminus\{c\}$ такі, що $a\neq b$ і $a\overset{\mathrm{mod}p}{\equiv}b\overset{\mathrm{mod}p}{\equiv}-k$.■

Як добре відомо [17], кільце R$[x]$ многочленів з дійсними коефіцієнтами «успадковує» чимало найважливіших властивостей кільця цілих чисел Z: елементарні властивості подільності, однозначність розкладу на «прості» множники, властивості найбільшого спільного дільника, найменшого спільного кратного, існування алгоритму Евкліда тощо.

Цікаво зупинитись на задачі знаходження такого многочлена $L_n(x)\in R[x]$, $\deg L_n(x)\leqslant n$, що $L_n(x_i)=r_j$, $i=\overline{0,n}$ ($r_0<r_1<\ldots<r_n$— довільні дійсні числа). Нескладно довести, що розв'язок цієї задачі, якщо він існує, є єдиним. А втім, один многочлен $L_n(x)$ з потрібною властивістю насправді існує:

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}r_j\prod_{\substack{k=0\\k\neq 1}}^{n}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}$$

(*інтерполяційний многочлен Лагранжа*).

Оскільки за теоремою Безу r_j є остачею від ділення многочлена $L_n(x)$ на двочлен $x-x_j$, то такий факт є простим аналогом ***китайської теореми про остачі***.

Але справджується й більш загальний факт, який можна вважати ***китайською теоремою про остачі*** для многочленів.

Теорема. Нехай $m_1(x)$, ..., $m_n(x)$ — попарно взаємно прості многочлени. Тоді для будь-яких многочленів $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$ існує рівно один такий многочлен $p(x)$, що $\deg p(x)<\sum\limits_{i=1}^{n}\deg m_i(x)$ і $p(x)\equiv a_i(x)\left(\mathrm{mod}m_i(x)\right)$, $i=\overline{1,n}$.

Доведіть цю теорему самостійно, скориставшись методом математичної індукції.

Багато цікавих задач, присвячених інтерполяційному многочлену Лагранжа та ***китайській теоремі про остачі*** для многочленів, читачі можуть знайти в [4, 14].

Китайська теорема про остачі використовується в математичній криптології — розділі математики, який вивчає методи зберігання та передавання секретної інформації.

Припустимо, що потрібно організувати доступ до конфіденційної інформації в комп'ютері для n осіб так, щоб вони могли одержати такий доступ тільки зібравшись всі разом. Оберемо n досить великих попарно взаємно простих чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Наприклад, можна взяти числа Ферма: $m_i = 2^{2^{u_1}} + 1$, $i = \overline{1,n}$, де $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$ — довільні натуральні числа (як зазначалось у розв'язанні задачі 17, два різні числа Ферма взаємно прості). Нехай i-та особа в якості свого ключа доступу обирає довільне натуральне число $c_j \in [1; m_i - 1]$. Тоді, зібравшись разом, вони можуть утворити (за допомогою комп'ютера) пароль $x_0 \in \left[1; \prod_{i=1}^{n} m_i - 1\right]$ — як єдиний на цьому сегменті розв'язок системи лінійних конгруенцій $x \equiv c_i (\mathrm{mod}\, m_i)$, $i = \overline{1,n}$. У подальшому цей пароль буде згенеровано для доступу до секретної інформації, якщо кожна особа введе в комп'ютер свій ключ. Застосування описаного методу на практиці пов'язано з питаннями ефективних за швидкодією алгоритмів множення і ділення з остачею многозначних чисел (комп'ютерні методи «довгої» арифметики), реалізації алгоритму Евкліда, удосконалення алгоритмів розв'язання лінійних діофантових рівнянь тощо [11].

На закінчення хочемо звернути увагу викладачів та учнів, котрі використовуватимуть матеріали статті для підготовки до олімпіад і турнірів, до конкурсів-захистів Малої академії наук тощо, що велика кількість з обговорених задач може бути розв'язана і без використання китайської теореми про остачі. А тому цілком доречно порадити читачам спробувати знайти інші підходи до розв'язання цих задач, і це сприятиме суттєвому збагаченню теоретичного та технічного арсеналу учасників математичних змагань вищого рівня, поглибленню їхніх знань та вмінь в галузі елементарної теорії чисел.

Література

1. *Айерлэнд К., Роузен М.* Классическое введение в современную теорию чисел. — М.: Мир, 1987. — 416 с.
2. *Александров П. С.* Введение в теорию групп. — М.: Наука, 1980. — 144 с. — (Б-чка «Квант»; Вып. 7).
3. *Алексеев В. Б.* Теорема Абеля в задачах и решениях. — М.: Наука, 1976. — 208 с.
4. *Алфутова Н. Б., Устинов А. В.* Алгебра и теория чисел: Сб. задач. — М.: МЦНМО, 2002. — 264 с.
5. *Бухштаб А. А.* Теория чисел. — М.: Просвещение, 1966. — 384 с.
6. *Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л.* Заочные математические олимпиады. — М.: Наука, 1986. — 176 с.
7. *Васильев Н. Б., Егоров А. А.* Задачи Всесоюзных математических олимпиад. — М.: Наука, 1988. — 288 с.
8. *Вейль А.* Теорія чисел для початківців. — К.: Вища шк., 1987. — 47 с.
9. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. — М.: Наука, 1981. — 176 с.
10. *Дэвенпорт Г.* Высшая арифметика. — М.: Наука, 1965. — 176 с.
11. *Гашков С. Б., Чубариков В. Н.* Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. — М.: Высш. шк., 2000. — 320 с.
12. *Грибанов В. У., Титов П. И.* Сборник упражнений по теории чисел. — М.: Просвещение, 1964. — 143 с.
13. *Егоров А. А.* Деление с остатком и сравнения по модулю // Квант. — 1991. — № 6. — С. 36–39, 49.
14. Зарубежные математические олимпиады / Под ред. И. Н. Сергеева. — М.: Наука, 1987. — 416 с.
15. Избранные задачи из журнала «American Mathematical Monthly» / Под ред. В. М. Алексеева. — М.: Мир, 1977. — 597 с.
16. *Калужнин Л. А., Сущанский В. И.* Преобразования и перестановки. — М.: Наука, 1985. — 160 с.
17. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Основы алгебры. — М.: Наука, 1994. — 320 с.
18. *Кудреватов Г. А.* Сборник задач по теории чисел. — М.: Просвещение, 1970. — 128 с.
19. *Лейфура В. М., Мітельман І. М.* Розв'язуємо разом. Задачі з цілими числами. Комбінаторика клітчастої дошки. — Х.: Основа, 2003. — 144 с.
20. *Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А.* Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування. — Л.: Євросвіт, 1999. — 128 с.
21. *Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А.* Математичні олімпіади школярів України: 1991–2000 рр. — К.: Техніка, 2003. — 541 с.
22. *Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А.* Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006 рр. — Л.: Каменяр, 2008. — 348 с.
23. *Ляпин Е. С., Айзенштат А. Я., Лесохин М. М.* Упражнения по теории групп. — М.: Наука, 1967. — 264 с.
24. *Серпинский В.* 250 задач по элементарной теории чисел. — М.: Просвещение, 1968. — 160 с.
25. *Трост Э.* Простые числа. — М.: ГИФМЛ, 1959. — 136 с.
26. *Флейшман Д.* Китайская теорема об остатках и гипотеза Ченцова // Квант. — 1997. — № 3. — С. 39–40, 52.
27. *Фомин Д. В.* Санкт-Петербургские математические олимпиады: 1961–1993 гг. — С.Пб.: Политехника, 1994. — 309 с.
28. *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. — М.: Наука, 1977. — 384 с.
29. *Ясінський В. А.* Теорія лишків та її застосування до розв'язування олімпіадних задач // Математика в школі. — 2009. — № 1–2. — С. 35–40.
30. Задачник «Кванта» // Квант. — 1987. — № 3. — С. 24.
31. Задачник «Кванта» // Квант. — 1999. — № 6. — С. 17–18.
32. Матеріали міжнародних та національних математичних олімпіад.

В. М. ЛЕЙФУРА,
професор, к.ф.-м.н., заслужений вчитель України, Чорноморський державний університет імені Петра Могили,

І. М. МІТЕЛЬМАН,
доцент, к. ф.-м. н., заслужений вчитель України, Рішельєвський ліцей при Одеському національному університеті імені І. І. Мечникова,

В. А. ЯСІНСЬКИЙ,
доцент, заслужений вчитель України, Вінницький державний педагогічний університет імені М. М. Коцюбинського.

УДК [371.26:51]: 376.54

ТУРНІРИ ЮНИХ ФІЗИКІВ ТА ЕКСПЕДИЦІЇ ЯК ФОРМИ МОТИВАЦІЇ ДО ВИВЧЕННЯ ФІЗИКИ І МАТЕМАТИКИ ТА РОЗВИТКУ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗДІБНОСТЕЙ ОСОБИСТОСТІ

У даній статті розглядаються форми роботи з дітьми, які виявляють інтерес до вивчення природничо-математичних предметів.

Work forms with children, allowing to cause interest to studying of natural- scientific subjects are considered in the given work.

Складовою частиною профільного та особистісно орієнтованого навчання є інтелектуальні змагання учнівської молоді. При їх великому розмаїтті домінуючими за формою та змістом вважаються предметні олімпіади. Насамперед, це Всеукраїнські очні олімпіади, Інтернет-олімпіади, міжрегіональні недержавні комплексні олімпіади. Однак для талановитої молоді цього виявилось недостатньо, тому виникла необхідність у нових формах і методах роботи щодо пошуку та підтримки обдарованої молоді. Популярність, яку на сьогоднішній день отримали турніри юних фізиків, свідчить про нагальну потребу таких форм роботи, в яких домінує відкритість проведення заходу та демократичність спілкування дорослих і дітей. Природне прагнення дітей до пізнання та розуміння таємниць природи найчастіше проявляється тоді, коли виникає потреба і необхідність дізнатися про нове, невідоме. Добре відомо, що емоційний стан дитини, її налаштованість на успіх і перемогу стимулюють процес пізнання. Але кожна дитина індивідуальна і потребує ту резонансну частоту сприйняття, за якої найбільш повно розкриваються її здібності та природний дар. Загальновідомо, що обдарована дитина потребує до себе індивідуального підходу, особливих методів, які не вкладаються в методики для середньостатистичного учня.

Крім того, в міру просування сходами пізнання істини важливим виявляється осмислення принципів організації і регуляції пізнавальної діяльності, визначення умов і шляхів, що ведуть до істини. Дуже важливим у цьому випадку є методологія пізнання, володіння методами і принципами пізнання, адекватне розуміння відносин між абстрактними (теоретичними) і практичними методами у пізнанні. Накопичуючи факти в процесі пізнання, встановлюючи визначені співвідношення між ними і пояснюючи ці співвідношення, ми все більше наближаємося до відкритої моделі явища. А от методика пізнання, прийоми і принципи дослідження, вибір моделі — всім цим основам можна навчитися у ранньому віці, коли ще молоде покоління не так сильно зазнало впливу «авторитетів у науці» і на них не тиснуть догми старих підходів і уявлень у науці.

Турнір — це командна творчість, і починається ця творчість з підготовки завдань. Підготовка завдань — це один з найважливіших етапів турніру. Методичним надбанням при підборі завдань турніру є відкритість обговорення ідей, що лежать в основі задач. На першому етапі такого обговорення бере участь практично кожний бажаючий. Ідеї задач пропонують з усіх розділів шкільного курсу фізики і учні, і професори. Крім того, у майбутньому завданні повинні прослідковуватись і міжпредметні зв'язки з біологією, хімією, математикою.

Умовно принципи відбору можна класифікувати виходячи з того, що завданнями, перш за все, повинні буди зацікавлені як дорослі, так і учні, тобто всі бажаючі розвивати свій інтерес до пізнання ПРИРОДИ.

А тому завдання повинні:

а) охоплювати весь шкільний курс;

б) зацікавити учнів як основної, так і старшої школи. А ще краще, якщо вони зацікавлять студентів і аспірантів;

в) бути складені так, щоб у відповідності до рівня компетентності вони могли вирішуватися як учнем, так і студентом. Тобто задача може бути вирішена як на якісному рівні, так і кількісному. Але в обох випадках потрібне експериментальне підтвердження: для учнів молодших класів це — демонстрація явища, для учнів старших класів і студентів — обов'язкова наявність експериментальної частини;

г) підбиратися так, щоб це були явища, які потребують експериментального підтвердження, виходячи з того, що фізика — наука експериментальна, а також з того, що змагань з фізики, де учень проявляє свої теоретичні знання, достатня кількість;

ґ) викликати інтерес до науки і вирішення поставленої проблеми вже на більш високому рівні;

д) не містити явних вказівок на фізичну модель, в рамках якої слід вирішувати задачу.

Відповіді, які отримано при розв'язанні задачі, приблизно мають відповідати величинам, які реально спостерігаються у відповідних умовах.

При формулюванні умов задачі повинні використовуватися загальноприйняті явища.

Комплект має містити задачі різного рівня складності.

Потрібно, щоб в умовах задачі передбачалися міжпредметні зв'язки, тобто, щоб при розв'язанні задачі та виборі її моделі учні мали б можливість проявити знання з інших дисциплін, які вивчаються в школі.

Варто звернути увагу на наступний аспект завдань турніру. Їхня принципова відмінність від завдань на олімпіадах полягає, насамперед, в тому, що в олімпіадних завданнях задача вже була сформульована, і учаснику олімпіади потрібно вгадати логіку автора задачі. Тому часто на олімпіадах діти ставлять запитання до задач, щоб зрозуміти логіку її автора, генеральну ідею. (Ті, кому доводиться відповідати на їхні запитання, у своїх відповідях мимоволі нав'язують своє бачення задачі). Автори ж прагнуть сформулювати або запропонувати завдання таким чином, щоб було якнайменше уточнюючих питань. Таким чином, чіткість формулювань багато в чому позбавляє їх фізичної краси. Вони стають математично детермінованими, тобто задачами теоретичної фізики, що для дітей ще не зрозуміло.

Приклади завдань турнірів.

1. «Глечик». У спекотних країнах для охолодження рідини використовують глиняні глечики. Від чого буде залежати та якими повинні бути параметри глечика, щоб рідину в ньому можна було заморозити?

2. «Парадокс». Якщо обережно опустити у вузький стакан скляну пластинку, то вона не тоне. Пластинка буде переміщатися, якщо до неї наближати або віддаляти інший предмет. Що необхідно зробити, щоб пластинка стала «слухняною»?

3. «Жовте листя». Восени можна спостерігати таке явище: листя, яке падає з дерев, починає колихатися. Опишіть їх поведінку.

4. «Погріб». Якої глибини має бути погріб, щоб умови збереження продуктів у літню спеку були оптимальними?

5. «З вітерцем». Велосипедист з'їжджає з гірки, не прокручуючи педалі, на широкий пляж. Чим визначається дальність його подорожі?

6. «Іскри багаття». Біля багаття буває незатишно через палаючі вуглики, що з нього вилітають. Де треба знаходитись, щоб не замерзнути та не зіпсувати одяг?

7. «Рятувальний круг». Хлопці для купання виготовляють «рятувальний круг» з підручних засобів, наприклад, з рубашки або простирадла. Коли «рятувальний круг» буде мати максимальну під'ємну силу?

Приклади розв'язання завдань, в яких використовуються міжпредметні зв'язки.

«Індикатор». Якщо на фотоплівку, яка розташована горизонтально емульсією догори, подихати, то незакріплений її кінець буде опускатися. Проаналізуйте це явище та запропонуйте, що можна реєструвати на його основі. Продемонструйте виготовлений Вами пристрій. Чим обмежується чутливість виготовленого пристрою?

1. Стислий аналіз і постановка задачі.

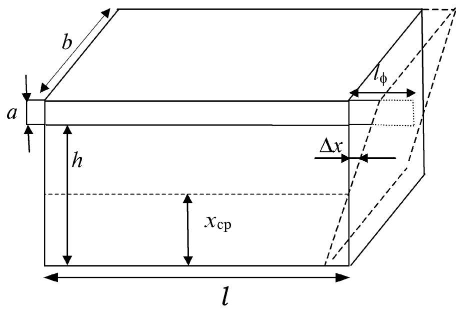
Як відомо з довідкового матеріалу хімії полімерів, емульсія плівки складається в основному із желатину. Він, у свою чергу, є простим білком, структура якого реагує на зміну вологи. При її збільшенні складчаста структура білка розкручується і желатин подовжується.

2. Гіпотеза — повітря, яке ми видихаємо, насичене парами води і, можливо, вони змінюють довжину емульсії, яка в свою чергу впливає на іншу частину плівки.

3. Спостереження за явищем і пробний експеримент. Закріпили плівку одним краєм, а другий залишили вільним. Якщо направити потік вологого повітря на поверхню з желатином, ми будемо спостерігати опускання кінця плівки. Якщо направляти на глянцеву поверхню — ефект не спостерігається. Попередній висновок. Відповідь на запитання задачі треба шукати в хімічних процесах, які протікають в желатині, що контактує з іншою речовиною, і внаслідок яких спостерігаються фізичні явища — згинання плівки.

4. Постановка задачі та вибір моделі. Розглянемо, як пов'язана зміна довжини желатину із згинанням плівки та подовження желатину зі зміною вологості.

Припустимо, що зміна довжини ділянки плівки прямо пропорційна відстані до «середньої лінії» (лінії, довжина якої не змінюється). Тоді запишемо умови рівності моментів сил, які діють з боку желатину на плівку і навпаки.



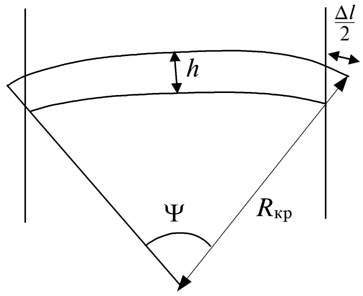
$$\Delta x = \alpha(x - x_{ср}) \tag{1}$$
$$M_{плівки} = M_{желатину} \tag{2}$$
$$M_ж = \frac{E_ж ab}{l}\left(\Delta l_\varphi - \alpha\left(h - x_{ср}\right)\right)\left(h - x_{ср}\right) \tag{3}$$
$$M_{пл} = \int_0^h \frac{E_{пл} b}{l}\left(x - x_{ср}\right)^2 dx\,. \tag{4}$$

Спростимо отримані вирази і знайдемо коефіцієнт пропорційності α. Позначимо безрозмірну комбінацію $\xi = \dfrac{E_ж a}{E_{пл} h}$.

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}\xi\Delta l_\varphi}{\left(2\sqrt{\xi+1} - \sqrt{3}\right)h} = f(\xi)\frac{\Delta l_\varphi}{h}\,. \tag{5}$$

Логічно, що α залежить від зміни довжини желатину і тим менше, чим більшу товщу плівки необхідно вигнути.

Оскільки залежність довжини желатину від вологи нам невідома, то спробуємо знайти її шляхом інших міркувань. Розглянемо згинання плівки виходячи з початкового і кінцевого радіуса її кривизни. Оскільки це величини, що вимірюються, то є можливість визначити невідому залежність.



$$\Psi = \frac{\Delta l}{h} = \frac{l}{R_{кр}} = \alpha \qquad (6)$$

Якщо початковий радіус кривизни R_0, то

$$\alpha = l\left(\frac{1}{R_к} - \frac{1}{R_0}\right). \qquad (7)$$

На прикладі цієї задачі було розглянуто міжпредметні зв'язки з хімією та математикою. Крім цього, для якісного представлення доповіді необхідно буде здійснити аналіз отриманих експериментальних і теоретичних результатів та пояснити, чому не завжди спостерігається відповідність між теоретичними результатами та експериментальними. Графічна ілюстрація і аналіз проводяться, як правило, в редакторі Matcad. Для зручності слухачів — журі, опонента, рецензента та спостерігачів, готується презентація, зазвичай в редакторі PowerPoint. Тобто дитина повинна засвоїти навички роботи з відповідними математичними оболонками і програмами, а також вміти самостійно писати комп'ютерні програми.

У дітей зазвичай розвинено почуття допитливості і небайдужості до того, що їх оточує. Треба тільки правильно показати, що це важливо і цікаво.

Турніри як одна з форм активізації пізнавального процесу можуть лише частково вирішити цю проблему та зацікавити невелику групу дітей. Але це не єдина форма роботи з дітьми, які з тих або інших причин не беруть участь в олімпіадах. У Рішельєвському ліцеї розроблено ще одну форму розвитку латерального критичного мислення. В основу форми роботи покладено те, що учень вивчає явища в реальному часі. Педагогічній науці відомо про сенситивне сприйняття та розуміння інформації. У стані максимальної концентрації дитина сприймає та переробляє інформацію на підсвідомому, неусвідомленому та інтуїтивному рівні. У подальшому отримана інформація здобуває доказову оболонку, але вона надовго залишається в пам'яті.

Важливо навчитися викликати резонанс емоційного стану дитини для сенситивного сприйняття навколишнього світу. Останнім часом все більше вчителів звертаються до теорії Сухомлинського, теорії занурення в середовище вивчення, тобто створення парти під відкритим небом. Адже тільки побачивши небо, не те, яке простирається над містами і селами, а в широкому українському степу, далеко від дому, де твій дім — намет, коли тебе проймає легкий озноб, можливо чи від масштабності навколишнього простору і до болю ріжучої тиші — ти починаєш ставити питання, не соромлячись їх наївності, які дійсно тебе цікавлять — про сузір'я, про устрій Всесвіту, про наше місце на Землі і т. п. Наблизитися до природи, доторкнутися до неї, відчути її можна тільки тоді, якщо зануритись в її середовище. Так з'явилася ідея проведення безпосередніх спостережень за навколишнім світом — учнівські науково-дослідні експедиції. Ентузіасти такої форми залучення до пізнання світу проводять їх по-різному, але єдині в одному, що за такою формою майбутнє — любов підростаючого покоління до рідної Землі, навколишнього світу.

Учнівські науково-дослідні експедиції передбачають підвищення ролі і значення освоєння різноманітних способів діяльності, створення умов для активної соціальної дії, дослідницької діяльності. Експедиції — це проектний метод, який допомагає створювати передумови для розвитку самостійності учня в осягненні нового, стимулюючи його природну допитливість і творчий потенціал, навчати:

— визначати певні проблеми і ставити завдання;

— планувати зміст діяльності учня;

— самоаналізу і рефлексії;

— пошуку і відбору актуальної інформації;

— практичному застосуванню знань в різних ситуаціях, актуалізації знань;

— проведенню дослідження;

— презентації особистих досягнень в різних формах.

Крім того, вони сприяють здобуттю цілісних природничо-наукових знань, вміння використовувати знання як інструмент розв'язання життєвих проблем, набуванню досвіду постановки, формулюванню власних цілей, вибору способу їх досягнення; формуванню вміння планувати, передбачати, прогнозувати, аналізувати, узагальнювати, систематизувати, робити висновки щодо розвитку комунікативних і дослідницьких навичок, формуванню базового алгоритму соціальної взаємодії, поведінки.

Проведення досліджень в учнівських науково-дослідних експедиціях за наступними напрямками:

— метеорологія;
— астрономія;
— гідрологія і дозиметрія;
— геологія і геофізика;
— геодезія.

Всі результати, які учні обробляють вже в стаціонарних умовах, здобуваються у польових умовах. Досліди та вимірювання виконуються під час активної частини експедиції — на стоянках та під час переходів від однієї стоянки до іншої. Підсумки виконаної роботи — це виступи з доповідями на регіональній науковій конференції Рішельєвського ліцею.

Більш детально про обсяг та зміст робіт, виконаних під час активної частини експедиції з кожним з наукових напрямків.

Метеорологія

1. Атмосферний тиск.
2. Напрямок і швидкість вітру.
3. Стан хмарності (якісно).
4. Кількість опадів (за наявності) у мм (за 3 години).
5. Температура сухого та вологого термометрів.
6. Відносна вологість.
7. Температура води в річці.
8. Рівень освітленості (у світлий час доби).

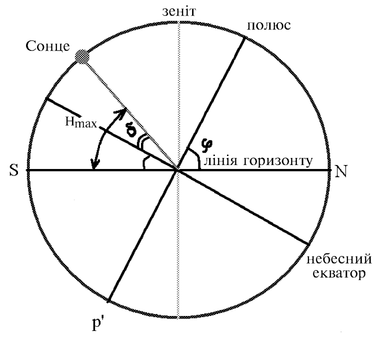
(Вимірювання проводяться протягом доби о 3-й, 6-й, 12-й, 15-й, 18-й, 21-й, 24-й годинах за будь-яких обставин: на стоянці, на переході, на привалі. Звіт подається у табличному та графічному вигляді).

Астрономія

1. Щоденне спостереження та замальовування сонячних плям.
2. Вивчення рефракції світла в атмосфері за спостереженням заходу Сонця.
3. Спостереження сузір'їв за допомогою карти зоряного неба.
4. Вивчення метеорних потоків.
5. Спостереження Місяця і планет за допомогою зорової труби.
6. Визначення географічної широти місцевості за полуденною висотою Сонця.
7. Визначення географічної довготи місцевості за моментом настання істинного сонячного полудня.
8. Визначення денного руху освітленості (на стоянці; вимірювання проводяться кожні 30 хв.) з побудовою графіків.

Ось, наприклад, як вирішується групою астрономів одна із задач щодо визначення географічних координат по Сонцю. Задача «Робінзона Крузо».

У програму наукової діяльності групи «Астрономія» було включено роботу щодо визначення географічних координат місцевості з астрономічних об'єктів. Головна мета даної роботи — навчитися визначати географічну широту і довготу, встановлювати ступінь точності отриманих результатів. Для проведення роботи було обрано третю стоянку (20 липня), яка знаходиться південніше села Константинівки Миколаївської області.



Об'єктом спостережень стало Сонце.

Для визначення широти скористалися формулою

$$H_{max} = 90° - \varphi + \delta, \quad \text{(див. рис.)}$$

де H_{max} — максимальна висота Сонця над горизонтом, φ — широта місця спостережень, δ — нахилення Сонця в даний момент (кутова відстань від Сонця до небесного екватора).

Тоді $\varphi = 90° - H_{max} + \delta$.

Значення нахилення береться з табличних даних Одеського астрономічного календаря. Максимальна висота Сонця визначається за спостереженнями.

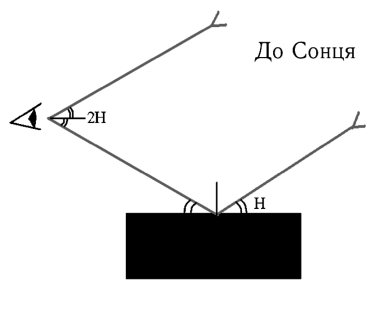
Для визначення довготи скористалися формулою

$$\Delta t = 24h(\lambda/360°),$$

де Δt — різниця часу настання сонячного полудня в даній місцевості і на гринвічському меридіані (момент верхньої кульмінації Сонця у Гринвічі, визначений за місцевим часом), λ — довгота місця спостереження.

Отже, $\lambda = (360°/24h)\Delta t = \Delta t\ /4$ (Δt = [хвилини]).

Для обчислення довготи цим методом також необхідно знати часовий пояс місця знаходження та мати точний годинник. Для визначення максимальної висоти Сонця та моменту настання полудня (момент, коли висота Сонця максимальна) використовували секстант.



Оскільки чистого горизонта не було, застосовувалась миска з водою. У секстанті поєднувались промені, які йшли прямо від Сонця та від його відбиття у мисці. Як видно на рисунку, кут між направленнями на Сонце і на його відбиток дорівнює подвійній висоті Сонця.

У роботі були задіяні три особи — одна об'єднувала зображення Сонця в секстанті, інша кожні дві хвилини, починаючи з 12:30, знімала показники приладу, третя записувала.

За отриманими даними був побудований графік, на якому видно, що максимальна висота Сонця 20 липня становила 62°50' і спостерігалась о 12:58.

Значить:

геогр. широта $\varphi = 47°42'$

геогр. довгота $\lambda = 30°30'$.

У комп'ютерній програмі Starcalc для цих координат був побудований графік теоретичної висоти Сонця над горизонтом.

За даними топографічної мапи України координати с. Константинівки наступні:

$\varphi = 47°40'$; $\lambda = 31°10'$.

Відносна погрішність вимірювань широти склала менше відсотка, а у вимірюваннях довготи дорівнює 2,2%.

Гідрологія та дозиметрія

1. Визначення ширини ріки в місцях стоянки методом триангуляції.
2. Визначення швидкості течії в річці.
3. Моніторинг рівня води в річці.
4. Вимірювання прозорості води в річці за допомогою диска Секкі.
5. Вивчення фізичних домішок у річній воді методом фільтрування.
6. Забір проб води з водоймищ в околицях стоянок.
7. Визначення вмісту солей у воді шляхом вимірювання її питомої електропровідності.
8. Вимірювання радіоактивного фону води, ґрунту, скельних порід.

Долина Південного Бугу, дослідженню якої були присвячені дві експедиції (2004 і 2008 року), представляє великий інтерес і як об'єкт для вивчення природного радіоактивного фону. Діти переконалися, що деякі сорти граніту, якими багатий район, що вивчається, мають радіоактивність в 2—3 рази вище середньої, що в лісі рівень фону, навпаки, помітно нижчий. Всі відзначили також, що близкість Південноукраїнської АЕС (маршрут проходив всього у 2—3 кілометрах від неї) на рівні радіоактивного фону ніяк не відбивається.

Геологія та геофізика

1. Опис основних характеристик ґрунту та навколишніх порід (на стоянці).
2. Побудова геологічних розрізів місцевості.
3. Збирання та опис зразків мінералів і ґрунту.
4. Визначення густини мінералів і ґрунту.
5. Гранулометричний аналіз ґрунтів з побудовою гістограми розподілу частинок за розмірами.
6. Визначення характеристик ґрунтів (зокрема pH).
7. Збирання та вивчення болотного газу.
8. Визначення індукції магнітного поля Землі і магнітного схилення (разом з астрономами).

Геодезія

1. Нанесення маршруту експедиції на мапу, включаючи радіальні виходи. Топографічна зйомка районів стоянок.
2. Ознайомлення всіх учасників експедиції з методами орієнтування на місцевості.
3. Навчання учасників ЕЕ із системою умовних позначень на топографічних мапах.

Як бачимо, тільки перелік змісту наукових завдань вже свідчить про компетентність учнів у різних природничо-математичних шкільних предметах. Учні всі ці завдання виконують самостійно, тому що їм це цікаво, тому що організаторам вдається створити умови для сенситивного сприйняття та вивчення навколишнього середовища.

Література

1. *Колебошин В. Я.* Деякі методичні аспекти формування змісту турнірів юних фізиків // Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Актуальні питання комплексної освіти у спеціалізованих середніх навчальних закладах з підвищеними вимогами до вивчення природничо-математичних дисциплін». — О., 1999. — С. 118—121.
2. *Колебошин В. Я., Мітельман І. М.* Фестивалі юних математиків та фізиків і відкриті олімпіади Рішельєвського ліцею як реалізація новітніх технологій у роботі з обдарованими учнями // Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Актуальні питання комплексної освіти у спеціалізованих середніх навчальних закладах з підвищеними вимогами до вивчення природничо-математичних дисциплін». — О., 1999. — С. 122—127.
3. *Колебошин В. Я., Палладій О. М.* Організація профільного навчання в Рішельєвському ліцеї з 1817 по 1864 рр. // Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Рішельєвські читання». — О., 2004. — С. 26—37.
4. *Колебошин В. Я., Віктор П. А.* Турніри не просто гра — турніри це серйозно // Матеріалі конференцій 1999 р. та 2004 р. «Актуальні питання», «Рішельєвські читання».

В. Я. КОЛЕБОШИН,
канд. фіз.-мат. наук, доцент, заступник директора Рішельєвського ліцею.

УДК 530.145;535.1

ЧИ ПОВИННІ ВІДСТАВАТИ ВІД СУЧАСНОСТІ ШКІЛЬНІ ПІДРУЧНИКИ З ФІЗИКИ?

Розглянуто деякі важливі питання методики викладання досягнень квантової та релятивістської фізики XX століття в загальноосвітній школі. Доведено, що застарілість підходів до викладання фізики та нехтування філософсько-методичним підґрунтям природничих наук часто призводить до схоластичного виродження змісту підручників, навіть тих розділів, які присвячено так званій класичній фізиці. Щодо сучасної фізики, то вона стрімко розвивається як в царині конденсованих середовищ, так і в царині мікросвіту, що аж ніяк не відображається в шкільних програмах та на сторінках підручників. Даються певні рекомендації, як покращати становище з викладанням, щоб забезпечити світоглядні та технічні потреби сучасного суспільства.

Some important issues of teaching quantum mechanical and relativistic physics of the XX century in high schools are considered. It is shown that obsolete approaches to the physics teaching and neglect of the philosophical and methodical basis of natural sciences often leads to scholasticism of textbooks. It concerns even those topics, which can be considered classical. As to the modern physics, although it develops rapidly both in its condensed matter and micro-world realms, this development has not been reflected in high-school programs or textbooks. Recommendations are given, how to improve the teaching level to ensure conceptual and technological problems of the modern society.

Викладання фізики в школах України ґрунтується на традиціях, закладених видатним російським дослідником і педагогом Олександром Столєтовим [1]. Саме він наприкінці XIX століття запровадив в Росії загальноєвропейський поділ «шкільної» фізики на механіку, молекулярну фізику, електрику та оптику. Решта розділів, які поступово відкривалися та «спотворювали» цю картину, вивчалися поза усталеними рамками в кінці курсу, і таким чином завжди були де-факто другорядними, необов'язковими та першими кандидатами на скорочення в разі форс-мажорних обставин. Останні з'являлися, принаймні, кожного травня, унеможливлюючи вивчення навіть тих коротких відомостей, які містилися в підручниках.

Наприкінці 80-х років XX століття становище в радянському викладацькому фізичному середовищі трохи виправилося. Тогочасні московські підручники, створені відомими вченими й педагогами, піднялися на трохи вищий щабель, ніж модель атома Бора-Резерфорда, хоча й містили низку засадничих помилок на кшталт «релятивістської маси» та «фотонакульки». Проте наразі українські діти позбавлені можливості навчатися й за цими підручниками. Всі діючі підручники в Україні створені вітчизняними авторами. Починаючи з 2007 року на арену виходить вже друге покоління національних підручників, цього разу для 12-річної школи.

На жаль, переважна більшість з них успадкувала всі недоліки своїх радянських прототипів, іноді справляючи враження недосконалого перекладу. В той же час осучаснення змісту та самого духу фізичної науки так і не відбулося (вкажемо на протилежний приклад російського підручника фізики нового типу [2—4]). Що ж до оригінальності, авторизації підходів, то наявні підручники дуже відрізняються між собою. З нашої, певна річ, суб'єктивної точки зору, з кращого боку можна виділити підручники Степана Мельничука та Пауля Пшенічки (дивись, наприклад, [5]), де важливою позитивною якістю є опора на власний експеримент учня з його подальшим аналізом на основі теорії.

Сподіваючись, як це притаманно невиправним оптимістам, на те, що сьогочасні та майбутні автори підручників не обмежаться тлумаченням істин, засвоєних під час вивчення легендарного, хоча й повного помилок, курсу Пьоришкіна, а натомість використовуватимуть досягнення сучасної фізики та педагогіки, ми хочемо дати в цих нотатках певні рекомендації з цього приводу. Вони базуються, зокрема, на англомовній педагогічній літературі і знайомстві з польськими та японськими шкільними й університетськими підручниками й посібниками. І насамкінець, у цьому короткому вступі варто підкреслити, що, всупереч розповсюдженій в освітянському середовищі думці, фізика *не поділяється* на шкільну, університетську й дослідницьку. Так само фізика, викладена в шкільних підручниках, *ідейно* не повинна поділятися на фізику «гуманітарну», «загальноосвітню» та «підвищеної складності». Будь-які вимушені спрощення та скорочення тексту не повинні відбиватися на точності формулювань та правильності змісту. Треба пам'ятати, що випускники «гуманітарних» шкіл згодом керуватимуть державою, так що їх уявлення про природу мусять бути адекватними, інакше доля України буде дуже сумною.

Якщо серед багатьох обов'язкових вимог до сучасного підручника з фізики обрати одну, найважливішу, то такою, поза сумнівом, буде *матеріалістичність* підходу до вивчення природи. Тобто, будь-які релігійні, містичні, забобонні або магічні погляди авторів підручника, рецензентів, редакторів та навіть працівників МОНу (знаючи наші реалії, можна справедливо запідозрити існування носіїв таких поглядів серед зазначених категорій освітян) не повинні відбиватися на змісті.

Наприклад, астрологія та нумерологія є не науками, а — системами антинаукового шкідництва та облуди. Торсійних полів у природі не існує, хоча вони могли б існувати, в принципі (дивись обговорення в нашій статті [6]). Всілякі прилади, спрямовані на «захист» від їхньої негативної дії, є засобом обдурювання легковірних споживачів [7]. Іншою «нетрадиційною», але дуже поширеною саме в Україні псевдофізичною маячнею, є теорія довготривалої пам'яті води (чистого H_2O) (дивись критику в працях [6, 7]). Більше того, адепти особливих надприродних властивостей води з числа номінальних фізиків пропагують необхідність молитов над водою та вигукування над нею «шляхетних» слів (Україна, Бог) з метою неминучого покращання її мікроструктури. Двадцять п'ять років тому всі ці кумедні персонажі були членами КПРС, а українські наукові та освітянські публікації були позбавлені навіть натяків на містику чи сміховинні вигадки. Але запекла боротьба з матеріалізмом далася взнаки, і ми на початку XXI століття змушені застерігати громадян європейської держави від нахабного ошуканства. Певна річ, що ми не закликаємо викладати будь-яку філософію в курсі фізики для загальноосвітньої школи. Проте підручники повинні підкреслювати дослідницький характер нашої науки, а вчителі мають боротися із сучасним мракобіссям.

Може дуже зашкодити інше небезпечне явище, на яке вказують тексти багатьох підручників з фізики. А саме, — догматичний підхід до визначень. Певна річ, що існують помилкові, непридатні й застарілі визначення фізичних величин і законів. З цим згодні всі фізики. Але не кожен погодиться з тим, що *бездоганного* визначення на всі можливі експериментальні ситуації, коли закон або величина є суттєвими, не буває! Це підкреслював, зокрема, видатний англійський філософ Карл Поппер, який слушно пропонував при вивченні якогось явища чи концепції спиратися на приклади, усвідомлення яких призведе до розуміння предмета вивчення попри неповноту сформульованого визначення [8].

Пояснімо це твердження, розглянувши одне з основних понять сучасної фізики, — поняття електромагнітного поля або його окремий, важливий для людства, випадок — видиме світло. Стандартне визначення, згідно з яким «електромагнітне поле є особливим видом матерії», може дратувати нас навмисною неконкретністю, але воно, принаймні, є правильним. Натомість, «дуже розумні» визначення деяких «просунутих» вітчизняних підручників: «світлова хвиля є потоком фотонів» чи «світло є потоком фотонів» виявляються хибними, причому містять декілька недоліків різного шкварту.

По-перше, неясно, що мається на увазі, — монохроматична хвиля (абстрактне поняття, справедливе лише для нескінченної хвилі) або скінчений цуг хвиль? В останньому випадку про монохроматизм треба відразу забути навіть при наявності лише однієї несучої частоти, бо скінчений імпульс за теоремою Фур'є може бути представленим як сукупність нескінченного числа гармонік з різними частотами [9].

По-друге, дуалістична природа електромагнітного випромінювання як раз і полягає в тому, що при спостереженні класичної хвилі Джеймса Максвела ніяких фотонів зафіксувати не вдасться. І навпаки, квантово-електродинамічний об'єкт з певним числом фотонів не є класичною електромагнітною хвилею. Математичним підґрунтям для цього твердження можуть слугувати співвідношення між невизначеностями числа фотонів ΔN та тригонометричних функцій від фази $\Delta(\sin\varphi)$ і $\Delta(\cos\varphi)$ для певного електромагнітного поля [10, 11] (аналогічне добре відомим співвідношенням Гайзенберга між імпульсом та координатою):

$$\Delta N \Delta(\sin\varphi) \geqslant |\langle\cos\varphi\rangle|/2, \qquad (1a)$$

$$\Delta N \Delta(\cos\varphi) \geqslant |\langle\sin\varphi\rangle|/2. \qquad (1b)$$

Тут кутові дужки <...> означають очікувані середні значення величин. Класична монохроматична хвиля з певною і *амплітудою*, і *фазою* відтворюється в рамках строгої теорії квантової електродинаміки через так звані когерентні стани, які є *суперпозицією* станів з певним числом квантів електромагнітного поля [10, 11]. До речі, ці кванти аж ніяк не є тими «частинками»-фотонами, відомостями про які ряснюють сторінки наших підручників. Але цю обставину ми розглянемо більш докладно трохи пізніше.

По-третє, рівноважне теплове «чорне» випромінювання, котре міститься, скажімо, в будь-якій порожнині, оточеній речовиною, на направлений «потік фотонів» явно не підходить, хоча його існування є незаперечним. Дійсно, варто тільки зробити невеличкий отвір в стінці, обмежуючій порожнину, і трохи розжарити речовину, як електромагнітне поле засвідчить свою наявність яскравим витоком видимого світла назовні. Отже, електромагнітне поле є, а де ж потік фотонів?

Не треба дивуватися глибині цих питань, які виникають і, врешті-решт, ще й досі не розв'язані сучасною фізикою. Автор квантової гіпотези, великий Альберт Ейнштейн, зізнавався на старості, що неможливість зрозуміти природу світла добряче псувала йому кров протягом усього життя. А якщо згадати, як не менш великий Ісаак Ньютон, який відкрив інтерференцію світла, марно намагався пояснити її в рамках корпускулярної концепції? Певна річ, що від авторів шкільних підручників і поготів не можна вимагати робити власні дослідження в усіх напрямах фізики, але бути на належному рівні розуміння сучасної фізики вони зобов'язані. Саме тому в розвинених країнах шкільні підручники пишуть колективи авторів, до яких входять кращі *уні-*

верситетські професори, всесвітньо відомі *дослідники*. Про якихось специфічних «педагогічних фізиків» на Заході годі й казати. Наприклад, у Польщі існує лише один маленький педагогічний інститут в рамках Польської Академії наук, який виконує координуючі функції.

Повернемося до поняття «фотон» [12]. Фотони в сенсі ейнштейнівської гіпотези про кванти-частинки з певною енергією та імпульсом є доречною моделлю лише при елементарному розгляді процесів поглинання та випромінювання світла речовиною [13]. Можна навіть пристосувати цю модель до вже згаданого чорного випромінювання в порожнині [14]. Але завжди треба пам'ятати, що це дуже спрощена модель, яка має обмежену сферу застосування, в тому числі і при використанні з дидактичною метою. І вже зовсім безглуздо й навіть шкідливо говорити про масу фотонів, які *на будь-якому рівні складності* аналізу електромагнітного поля є безмасовими частинками.

Варто підкреслити, що сама хибна ідея про якусь «динамічну» масу фотонів, котра пропорційна їхній частоті, є наслідком не менш хибного поняття про «релятивістську масу», яка залежить від швидкості тіла [15]. Маса тіла є скалярною величиною і при переході від однієї до іншої системи відліку не змінюється, на відміну, наприклад, від компонента чотиривектора енергії-імпульсу. Інколи автори підручників (шкільних або університетських) вважають, що «релятивістську масу» можна вводити з дидактичною метою. Підкреслимо ще раз, що ніяка шляхетна дидактична мета не виправдовує застосування неправильних визначень, термінів, понять та моделей. Більше того, ніякого полегшення при навчанні «релятивістська маса» насправді не приносить, бо її застосування в «теплій» компанії зі спрощеною моделлю фотонів надає останнім непритаманну їм скінчену масу. Це може так заплутати бідного учня, що він вважатиме сучасну фізику маячнею, в той час як маячнею є лише відповідний розділ шкільного підручника.

Треба взяти до уваги, що фактичними помилками просякнута вся історія викладання фізики, часом й у тих випадках, коли наука в цілому на той час в усьому розібралася. Тому не тільки не етично, але й небезпечно для плагіаторів переписувати чужі тексти, навіть, якщо автор є лауреатом Нобелівської премії або академіком. Наприклад, Фейнман в своїх відомих лекціях невірно трактував сили інерції [16]. Причина його неуспіху в тому ж, в чому ми часто переконуємося в класі: виникає плутанина між описом явища в інерціальній та неінерціальній системах відліку.

Помилки в підручниках відтворюються покоління за поколінням через те, що автори підсвідомо вважають істинними ті твердження, які повторюються як мантри досить часто та протягом достатньо довгого проміжку часу. Такий підхід справедливо було названо середньовічним, монастирським підходом [17], бо він нагадує прикрашання новими яскравими віньєтками канонічних релігійних текстів у затишку монастирських келій. Прикладом такого підходу може бути визначення швидкості світла в середовищі як c/n, де c — швидкість світла, а n — показник заломлення середовища. По-перше, це визначення справедливе лише для так званої фазової швидкості світла, котре стосується нескінченної гармонічної хвилі, доволі абстрактного поняття. *Швидкість сигналу* має з c/n небагато спільного. По-друге, n залежить від частоти електромагнітної хвилі, яка розповсюджується так, що n може приймати не тільки значення, менші за одиницю, але й від'ємні значення. Взагалі, «швидкостей світла» дуже багато [18], що свідчить на користь наведеної вище думки Поппера.

Помилки в підручниках мають також характер хибної атрибуції відкриттів певним вченим і пов'язані з тим, що автори підручників не читають першоджерел, а лише копіюють попередні підручники [17]. Бохрен вказує на одну важливу особливість атрибуції в підручниках: вона здебільшого віддає перевагу одній особі, в той час як певне відкриття часто робиться кількома вченими протягом досить довгого часу. Тут можна згадати винахід радіо, за який Гульєльмо Марконі отримав Нобелівську премію. Насправді, цю честь мали б розділити з ним, принаймні, Джеймс Максвел, Генрих Герц, Олівер Лодж та Олександр Попов.

Як нам уже доводилося пояснювати для освітянської громадськості [12], ще одним відтворюванням неуважними нащадками-педагогами старих помилок видатних вчених є славнозвісна формула Ейнштейна $E = mc^2$ в її сфальшованих іпостасях. Блискучий аналіз, проведений російським фізиком Левом Окунем [15], показав, яка формула є справжньою, узгодженою із спеціальною теорією відносності. А саме

$$E_0 = mc^2, \tag{2}$$

де E_0 є енергія тіла, яка розглядається у власній системі відліку, тобто в тій, де тіло знаходиться у спокої. Маса, яка входить до формули (2), є добре всім знайома маса, інваріантна відносно переходу до іншої системи відліку, тобто скалярна. А от масою спокою її назвати не можна, бо іншої «неспокійної» маси просто не існує. Коли ми розглядаємо те саме тіло з точки зору іншої системи відліку, яке рухається зі сталою швидкістю $\boldsymbol{v}$, то енергія тіла $E(v)$ вже не дорівнює E_0, але тоді й формула на кшталт (2) з якимось формальним коефіцієнтом $m(v)$ втрачає фізичний сенс!

Є ще одна методична хиба, якою просякнуті всі наші (не тільки шкільні) підручники з фізики. Їхні автори вважають, що можна звести кожну теорію до системи аксіом, звідки випливають усі потрібні для практики теореми. Це не так, бо фізична теорія не є математичною конструкцією. Натомість, вона є узагальненням спостережень за природою та дослідів з обов'язковим залученням інтуїції [19].

Наприклад, спеціальна теорія відносності була виведена Ейнштейном на основі інтуїтивних міркувань, які спиралися на два постулати (але не обмежувалися ними!): незалежність швидкості світла від вибору системи відліку та принципу відносності. Багато списів ламають зараз, намагаючись з'ясувати, чи цих двох постулатів достатньо для побудови теорії, чи треба ще щось додати, чи одного з них досить? На нашу думку, такі дослідження мають певною мірою схоластичний характер. Головним є правильна фізична інтерпретація отриманих результатів, яка неодмінно ґрунтується на узагальненому експериментальному досвіді. Тут слід сказати про невдачу великого французького математика Анрі Пуанкаре, який одночасно з Ейнштейном сформулював основні рівняння спеціальної теорії відносності, але розглядав їх як такі, що описують динаміку деформованого електрона. Натомість, Ейнштейн правильно інтерпретував перехід між системами відліку як кінематичні співвідношення. Порівняння поглядів та кінцевих результатів двох видатних дослідників доводить, що інтуїція та методологія відіграють вирішальну роль у відкритті в царині природничих наук, а математичне формулювання є другорядним.

До речі, нам доводилося чути думки, що не варто взагалі викладати теорію відносності в школі. Підставою вважалися і вважаються труднощі її сприйняття учнями. Ми з такими думками не згодні. По-перше, засвоєння цього розділу великою мірою залежить від якості підручника та кваліфікації вчителя, по-друге, невже динаміка твердого тіла з урахуванням обертання у класичній механіці або ядерна фізика є легшими для засвоєння? З такою логікою можна, поступово просуваючись назад, дійти до Середньовіччя! Уявімо собі хоча б, що в курсі історії цим Середньовіччям все й закінчується, бо сучасна історія є складною для сприйняття (що, безумовно, є правдою).

Іншим прикладом вирішальної ролі інтуїції можна вважати нерелятивістську квантову механіку з фантастично продуктивним хвильовим рівнянням великого Ервіна Шредінгера. Рівняння Шредінгера, всупереч тому, що інколи пишуть у підручниках, не виводиться! Воно сконструйовано інтуїтивно на основі цілої низки експериментальних фактів і має свою обмежену сферу застосування. Варто зазначити, що нерелятивістська квантова механіка може слугувати яскравим прикладом примату фізичного змісту над математичною формою. Насправді існують, принаймні, чотири рівноправні формулювання цієї науки: хвильове, матричне (Гайзенберг, Борн, Йордан), символічне (Дірак) та через інтеграли по траєкторіях (Фейнман). Усі вони еквівалентні, а сутність полягає в імовірнісному характері квантово-механічних законів.

Врешті-решт візьмімо так звані три закони Ньютона. Спроби авторів підручників звести це велике творіння людського генію до набору аксіом ні до чого не приводить, а тільки заплутує учнів. В цьому легко переконатися, зауваживши, що перший закон формально є ніби-то наслідком другого. Насправді перший закон є самостійним глибоким твердженням, що спростовує невірну фізику Аристотеля, яка володіла умами вчених тисячі років.

Щодо другого закону, то попри його безсумнівну концептуальну та дидактичну корисність [20], він є лише визначенням сили, бо сила вимірюється тільки через прискорення. Іншими словами (лауреата Нобелівської премії Франка Вільчека) [21], другий закон є корисним алгоритмом та мовою, за допомогою якої описуються відомості про Світ. Так що ні про яку аксіоматизацію системи ньютонівських законів не може бути й мови.

З цих та безлічі інших, не наведених тут, прикладів випливає, що догматичний підхід авторів вітчизняних підручників фізики до різних її розділів заважає засвоєнню матеріалу, перешкоджає розвитку в учнів індивідуального матеріалістичного світогляду. А розуміння природи можливо тільки на основі цього світогляду, коли наука постає способом опису природних явищ на основі експериментальних даних із залученням інтуїтивної складової. Остання притаманна людському розуму, який сам є творінням природи. Тому ми можемо пізнавати Всесвіт, а на основі пізнання створювати нові матеріальні об'єкти, які покращують наше життя та сприяють подальшому розвиткові науки.

Не варто думати, що наші підручники страждають тільки від філософської неосвіченості деяких їх авторів. Їх неосвіченість має системний, злоякісний характер. Особливо вона дається взнаки, коли стосується фізики конденсованих середовищ. Наприклад, від підручника до підручника крокує хибне твердження, що залежність опору металів (R) від температури (T) є лінійною. Насправді, здебільшого $R(T) \sim T^5$ або T^2 в залежності від того, переважає розсіяння носіїв струму коливаннями кристалічної решітки чи взаємодією з іншими носіями. Ці залежності відомі науці вже десятки років, а не потрапляють вони на сторінки наших підручників, бо їх автори відстають від передового фронту пізнання інколи навіть років на сто, а вчитися не бажають. Підкреслимо, що вивчення провідності твердих тіл є дуже важливим розділом фізики, бо дозволяє в найпростіший спосіб зондувати їхню електронну структуру. Годі й сподіватися, аби в наших підручниках цьому присвятили бодай декілька рядків, написаних належним чином.

Слід мати на увазі, що зонна теорія твердого тіла, яка ще так-сяк викладається в шкільних підручниках (слава Богу!), не є останнім словом науки. Існування взаємодії між електронами або між дірками (так звані багаточастинкові кореляції) може радикально змінити зонну структуру певної речовини так, що зонна теорія не взаємодіючих частинок не зможе правильно відображати дійсність. Крім того, існують кореляції між електронами та дірками (екситонні явища) і поляризація кристалічної решітки кулонівським полем носіїв струму (полярони). І цим поглядам вже виповнилося 70—80 років, і вони дуже важливі, а про них забувають.

Є ще один комплекс явищ у фізиці твердого тіла, який є методично і практично важливим, а саме, сукупність ефектів, пов'язана зі спином електронів. Зокрема, в підручниках треба обов'язково давати поняття про обмінну взаємодію між електронами, яка призводить до багатої палітри можливостей магнітного упорядкування електронних спинів, а, отже, їхніх магнітних моментів. Магнітно-упорядковані структури не є відгалуженням парамагнетиків, як інколи викладається в школі, а є особливими станами речовини. В останні десятиліття відкрито цілу низку ефектів у фізиці електропровідності, де спостерігається залежність струму від спину. Цей розділ електроніки, названий спинтронікою, забезпечує, наприклад, мобільні телефони швидкою оперативною пам'яттю. Нещодавно за це німець Петер Грюнберг і француз Альбер Фер отримали Нобелівську премію.

Дбаючи про правильність та повноту висвітлення сучасної фізики в шкільних підручниках, треба не забувати про високу якість мовного підґрунтя, широку ерудицію авторів, захоплюючий зміст конкретних відомостей. Інакше кажучи, викладання фізики повинно викликати в учнів відчуття *насолоди* [22]. «Сірий» підручник може звести нанівець всі зусилля вчителя.

Підсумовуючи ці короткі витяги з довгого переліку недоліків наших шкільних підручників, ми дозволимо собі декілька рекомендацій з метою покращання програм та підручників. Отже, треба залучати до їх написання успішних дослідників з Національної Академії Наук, відбирати підручники тільки на конкурсних засадах, скасовувати при цьому будь-які преференції для професійних «педагогічних фізиків», докорінно поліпшити викладання фізики в педагогічних вузах, підвищивши, насамперед, кваліфікацію викладачів. Треба було б ще виховати у талановитих випускників загальноосвітніх шкіл бажання піти до цих ВНЗ, але для цього потрібні величезні гроші на підвищення заробітної плати вчителів, що наразі є повною утопією.

Висловлюємо вдячність професору Володимиру Івановичу Кузнєцову, з яким ми часто й плідно обговорювали як загальні, так і конкретні проблеми викладання фізики в Україні.

Література

1. *Соминский М. С.* Александр Григорьевич Столетов. — М.: Наука, 1970. — 352 с.
2. *Бутиков Е. И., Кондратьев А. С.* Физика. Кн. 1. Механика. — М.: Физматлит, 2000. — 352 с.
3. *Бутиков Е. И., Кондратьев А. С.* Физика. Кн. 2. Электродинамика. Оптика. — М.: Физматлит, 2000. — 336 с.
4. *Бутиков Е. И., Кондратьев А. С., Уздин В. М.* Физика. Кн. 3. Строение и свойства вещества. — М.: Физматлит, 2000. — 335 с.
5. *Мельничук С. В., Пшенічка П. Ф.* Фізика — крок у XXI століття: Підруч. для загальноосвіт. навч. закл. 7 клас. — Чернівці: МСП «Агат», 2002. — 184 с.
6. *Габович О. М., Кузнєцов В. І.* Наука та еліта // Економіст. — 2006. — № 6. — С. 66—73.
7. *Кругляков Э. П.* Ученые «с большой дороги». — М.: Наука, 2002. — 320 с.
8. *Поппер К.* Знание и психофизическая проблема: В защиту взаимодействия. — М.: УРСС, 2008. — 251 с.
9. *Горелик Г. С.* Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику. — М.: ГИФМЛ, 1959. — 572 с.
10. *Лоудон Р.* Квантовая теория света. — М.: Мир, 1976. — 488 с.
11. *Габович О. М.* Квантова оптика нагороджена Нобелівською премією за 2005 рік. Фізика // Шкільний світ. — 2005. — № 33 (261).
12. *Габович О. М., Габович Н. О.* Як у загальноосвітній школі викладати сучасну фізику. — Х.: Основа, 2008. — 111 с.
13. *Клышко Д. Н.* Квантовая оптика: квантовые, классические и метафизические аспекты // Успехи физических наук. — 1994. — Т. 164, № 11. — С. 1187—1214.
14. *Gabovich A. M., Gabovich N. A.* How to explain the non-zero mass of electromagnetic radiation consisting of zero-mass photons // European Journal of Physics. — 2007. — Vol. 28, issue 4. — P. 649—655.
15. *Окунь Л. Б.* Понятие массы (Масса, энергия, относительность) // Успехи физических наук. — 1989. — Т. 158, № 3. — С. 511—530.
16. *Tiersten M. S., Soodak H.* Propagation of a Feynman error on real and inertial forces // American Journal of Physics. — 1998. — Vol. 66, issue 9. — P. 810—811.
17. *Bohren C. F.* Physics textbook writing: Medieval, monastic mimicry // American Journal of Physics. — 2009. — Vol. 77, issue 2. — P. 101—103.
18. *Smith R. L.* The velocities of light // American Journal of Physics. — 1970. — Vol. 38, issue 8. — P. 978—984.
19. *Фейнберг Е. Л.* Две культуры. Интуиция и логика в искусстве и науке. — Фрязино: ВЕК-2, 2004. — 288 с.
20. *Hacyan S.* What does it mean to modify or test Newton's second law? // American Journal of Physics. — 2009. — Vol. 77, issue 7. — P. 607—609.
21. *Wilczek F.* Whence the force of $F = ma$? I: Culture shock // Physics Today. — 2004. — Vol. 57, issue 10. — P. 11—12.
22. *Hewitt P. G.* Millikan lecture 1982: The missing essential — a conceptual understanding of physics // American Journal of Physics. — 1983. — Vol. 51, issue 4. — P. 305—311.

О. М. ГАБОВИЧ,
доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник Інституту фізики Національної Академії Наук України,

Н. О. ГАБОВИЧ,
заслужений вчитель України, вчитель фізики гімназії № 48 м. Києва.

УДК 372.851

ЗАДАЧІ НА ЗМІСТ ТЕОРЕМ ЛАГРАНЖА І РОЛЛЯ

Наведено приклади задач на зміст теорем Лагранжа і Ролля, застосування яких в учбовому процесі дозволяє показати та закріпити техніку використання поняття похідної функції.

The examples of targets the tasks of maintaining (the essence) the theorem's of Lagrange and Rolle it is presents. Their use in the classroom can show and secure technique for using the concept of the derivative function.

У практиці освоєння математичного аналізу студентами інженерних спеціальностей велике значення має поняття похідної, оволодіння яким дозволяє усвідомлено використовувати при розв'язанні різних технічних задач математичні моделі, які засновано на диференціальних відносинах, підвищуючи тим самим якість професійної підготовки. Зокрема, враховуючи різноманітне практичне використання, важливим на початковому етапі вивчення математичного аналізу є засвоєння змісту теорем Лагранжа і Ролля.

Відомим неаналітичним формулюванням теореми Лагранжа є таке висловлювання [1]: «...на гладкой дуге непременно найдется, по крайней мере, одна точка, в которой касательная параллельна хорде, стягивающей эту дугу».

Відносно цього формулювання слід зауважити, що у відомих підручниках немає різночитань. Що ж до формулювання теореми Ролля, то відомо два її формулювання:

— між нулями деякої безперервної і гладкої функції завжди має місце хоча б одна точка з нульовим значенням похідної [2];

— якщо для деякої безперервної і гладкої функції вказано дві такі координати, в яких її значення дорівнює одне одному, то між двома цими координатами повинна бути хоча б одна точка з нульовим значенням похідної [1, 3].

Перше формулювання відповідає первинному формулюванню теореми Ролля («між двома коренями гладкої функції обов'язково є хоча б один корінь її похідної» [2]).

Друге ж формулювання, як більш загальне, відповідає наведеному формулюванню теореми Лагранжа, що дозволяє розглядати ці теореми разом (відзначимо, що теорема Ролля може розглядатися як висновок теореми Лагранжа).

В [1] на основі теореми Лагранжа записується формула скінченних приростів (аналітичне формулювання теореми Лагранжа), для якої дається її застосування до наближеного розв'язання нелінійних рівнянь методом ітерацій. Закріплення такого застосування теореми Лагранжа можливе на різних задачах. Але ці задачі (їх приклади є і в [1], і в [2]) будуть в більшій мірі задачами саме на розв'язання нелінійних рівнянь методом ітерації за формулою (1), а не задачами на той зміст теореми Лагранжа, який присутній власне в її неаналітичному формулюванні.

Тут зміст теореми Лагранжа слід розуміти як неодмінне існування такої точки на гладкій дузі, в якій похідна ординати-функції по координаті-абсцисі (змінна), якщо дугу розглядати в деякій системі прямокутних координат, буде рівна кутовому коефіцієнту хорди, що стягує цю дугу.

Аналогічно, зміст теореми Ролля розуміється як неодмінне існування для гладкої функції такої, що січна, яка паралельна осі абсцис, перетинає цю функцію хоча б у двох точках, дотичної до цієї функції з координатою точки дотику, яка розташована між двома координатами точок перетину.

З урахуванням цього, в цілому, задачі на зміст теорем Лагранжа і Ролля є дидактично важливими, оскільки дозволяють на конкретних прикладах показати і закріпити техніку вживання поняття похідної функції.

В роботі розглядаються три такі задачі, складені автором, які можна вважати саме задачами на зміст теореми Лагранжа (задача 1 і задача 3) і теореми Ролля (задача 2), на відміну від відомих задач на використання цих теорем.

Ці задачі засновані на аналітичному записі теореми Лагранжа у вигляді формули скінченних приростів [1]

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}=\varphi'(c), \quad (1)$$

де $\varphi(x)$ — рівняння дуги, безперервної на інтервалі $[a, b]$; c — координата деякої точки, що задовольняє умову $a<c<b$, в якій дотична з кутовим коефіцієнтом $\varphi'(c)$ паралель хорді між точками a і b, що має кутовий коефіцієнт $\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$.

Задача 1. *Умова.* Задана функція

$$\varphi(x)=Ax^2+Bx+C. \quad (2)$$

Довести, що розв'язання x_0 рівняння

$$\varphi'(x)=\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}, \quad (3)$$

задовольняє нерівності

$$a<x_0<b, \quad (4)$$

де a та b — будь-які числа такі, що

$$b > a. \quad (5)$$

Розв'язання.

Похідна заданої функції $\varphi(x)$ по (2), як похідна суми, може бути знайдена як сума похідних кожного з доданків Ax^2, Bx і C. А саме для похідної заданої функції можна записати наступний вираз

$$\varphi'(x) = 2Ax + B.$$

Підстановка цього виразу і заданої функції в (3) дозволяє записати спочатку задане рівняння (3) як

$$2Ax + B = \frac{A(b^2 - a^2) + B(b-a)}{b-a},$$

що після нескладних перетворень дозволяє переписати (3) остаточно до рівняння наступного вигляду

$$2Ax = A(b + a), \quad (6)$$

з розв'язанням

$$x_0 = 0.5(b + a). \quad (7)$$

Вигляд отриманого розв'язання рівняння (3) дає можливість безпосередньо розв'язати задачу, що розглядається. Для цього достатньо показати, що для кореня x_0 по (7) виконується нерівність (4).

Дійсно, враховуючи умову (5), можна записати рівносильну йому нерівність

$$2b > a + b,$$

або

$$b > 0.5(a + b)(8)$$

додаванням b до правої та лівої частин (5).

Враховуючи (8), нескладно побачити, що для кореня x_0 по (7) має місце співвідношення

$$x_0 < b. \quad (9)$$

Далі, враховуючи умову (5), можна записати ще таку нерівність

$$b + a > 2a,$$

або

$$0.5(a + b) > a \quad (10)$$

додаванням a до правої та лівої частин (5).

Враховуючи (10), нескладно побачити, що для кореня x_0 по (7) має місце співвідношення

$$x_0 > a. \quad (11)$$

Таким чином, співвідношення (9) і (11) дають в сукупності розв'язання даної задачі у вигляді ланцюжка нерівностей (4).

До аналізу задачі 1. Перш за все відзначимо, що розв'язання задачі, яке розглянуто, не залежить від конкретних числових значень коефіцієнтів A, B та C в (2).

У зв'язку з цим можна рекомендувати розв'язувати цю задачу спочатку для яких-небудь конкретних числових значень цих коефіцієнтів та параметрів задачі a і b. Потім, помітивши, що корінь x_0 рівняння (3) завжди знаходиться на середині інтервалу $[a, b]$, дати можливість розв'язати задачу, що розглядається, в наведеному вище загальному вигляді.

Відзначимо також, що при поясненні задачі 1 представляється корисним використовувати графічне зображення ходу її розв'язання, здійснення якого не завдасть ніяких труднощів (тут не приведено для економії місця).

Задача 2. *Умова*. Задана функція (2). Знайти такі два числа a і b, що для координати $x_0 = 0.5(a + b)$ похідна функції (1) в цій точці буде рівна нулю.

Розв'язання.

Згідно з вищезазначеним похідна функції, що задана в умові, може бути записана як сума

$$\varphi'(x) = 2Ax + B. \quad (12)$$

З (12) нескладно отримати, що похідна заданої функції дорівнює нулю, коли координата дорівнює

$$x_0 = -0.5\ B/A. \quad (13)$$

Отже, числа a і b повинні бути такими, щоб їх половинна сума давала в результаті значення координати x_0 по (13).

Припустимо, що шукані числа a і b задовольняють для визначеності умові $b > a$. Тоді, як число a можна прийняти за будь-яку координату, яка менше ніж координата x_0.

А саме, приймемо, що

$$a = x_0 - p, \quad (14)$$

де p — відстань між координатами x_0 і a.

При цьому значення b не може бути будь-яким, воно повинно бути таким, щоб виконувалася рівність за умови $x_0 = 0.5(b + a)$. Враховуючи (14) з вказаної рівності за умови для числа b одержуємо співвідношення

$$b = x_0 + p. \quad (15)$$

Слід зазначити, що з (14) і (15) випливає, що шукана пара a і b відповідає будь-якій парі координат, яка симетрична відносно координати x_0.

Відзначимо в аналізі задачі 2, що вона може розглядатися не тільки як задача на зміст теореми Ролля, але й як задача на вживання теореми Лагранжа (адже теорема Ролля може розглядатися як висновок теореми Лагранжа).

Задача 3. *Умова*. Задана функція (2). Задані також координати $x_1 = a$ та $x_2 = c$ такі, що

$$c > a. \quad (16)$$

Знайти координату $x_3 = b$, що задовольняє формулюванню теореми Лагранжа.

Переконатися, що має місце нерівність

$$b > c. \quad (17)$$

Розв'язання.

Для розв'язання цієї задачі скористаємося аналітичною формою запису теореми Лагранжа (1).

Використовуючи те, що для заданого в цій задачі виду функції $\varphi(x)$ похідна може бути записана як $\varphi'(x)=2Ax+B$, перепишемо (1) до такого вигляду

$$A(b + a) = 2Ac, \quad (18)$$

виконавши ті ж перетворення, які були зроблені вище при отриманні рівняння (6).

У результаті координата $x_3=b$, яку треба знайти, із (18) нескладно отримати такий вираз

$$b = 2c - a. \quad (19)$$

Далі, представивши праву частину в (19) як $c+c-a$, з урахуванням (16), нескладно побачити, що знайдене значення b є сумою c та деякої добавки $c-a$, яка більше нуля. З цього прямо випливає нерівність (17).

Висновок. Безпосереднє використання цих задач в учбовому процесі показало, що зміст теорем, що розглядаються, сприймається з достатнім інтересом, надаючи певний простір для прояву творчих здібностей (наприклад, спроби варіювати задану функцію або початкові дані задач). Причому наявне використання в задачах, що розглянуто, геометричного значення похідної як характеристики кута нахилу дотичної до кривої дозволяє показати і закріпити техніку застосування поняття похідної функції як деякої границі (при умові $a \to b$) для лівої частини (1).

Література

1. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике. — М.: Наука, 1969. — 640 с.
2. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики. — СПб.: Лань, 2001. — 736 с.
3. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. — М.: Наука, 1986. — 544 с.

М. Ю. БРАНСПИЗ,
асистент, Східноукраїнський національний університет ім. В. Даля (м. Луганськ).

УДК 378.853

КОМПЛЕКСНИЙ ПІДХІД ДО ЗМІСТУ ПРАКТИЧНОЇ ТА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ФІЗИКИ

Актуалізуються проблеми формування компетенцій учнів в процесі навчання фізики через забезпечення виконання кожним учнем обов'язкового обсягу завдань в умовах сучасного освітнього середовища. Наведений варіант змісту і структури завдань до вивчення законів постійного струму.

The problems of forming of kompetentostey aktualyzyruyutsya studying in the process of teaching to physics by providing of implementation by every studying obligatory volume of tasks in the conditions of modern educational environment. The variant of structure and maintenance of tasks to the study of laws of direct current is resulted.

Організація освітнього середовища для навчання фізики в старшій школі характеризується комплексністю — вивченням і проектуванням в комплексі різносторонньої діяльності учнів. Відповідно до задач, визначених державними програмами для сучасної школи, при навчанні фізики важливо забезпечувати формування вміння здобувати і застосовувати знання в різноманітних ситуаціях, що стрімко змінюються за нинішніх умов, здатності генерувати оригінальні ідеї, знаходити нетривіальні підходи до вирішення проблемних ситуацій.

З позиції компетентнісного підходу зміст освіти не повинен зводитись до знаннєво-орієнтованого компонента, а припускає цілісний досвід розв'язання життєвих проблем, виконання ключових (тобто таких, що відносяться до багатьох соціальних сфер) функцій, соціальних ролей, компетенцій [3, 133]. Відомо, що в світі не існує теорії змісту освіти, а є концепція компетентності [6, 18]. Формування соціально-предметної компетентності фахівця забезпечується змістом профільних і базових дисциплін, який охоплює перспективні прогнози розвитку людської цивілізації щодо глобалізації всіх сфер життя, комп'ютеризації та інтенсивного впровадження нових технологій. Профільна та допрофесійна компетентності мають однакову суть, виступаючи інтегративною, результативною характеристикою діяльності, яка демонструє здатність активізувати й мобілізувати в конкретній ситуації знання та досвід для виконання конкретних практичних завдань профільної галузі. С. Н. Рягін приходить до висновку, що потрібно не тільки поглиблювати і поширювати знання з окремого предмета, а й формувати «метазнання», спрямовувати на засвоєння способів пізнання в конкретній профільній галузі, які дозволяють майбутньому фахівцю досягнути необхідного рівня предметних знань і вмінь з обраної професії [9].

Детальний аналіз охоплення всіма видами навчальної діяльності одиниць змісту шкільного курсу фізики свідчить про недостатність розробки і планування практичної і експериментальної діяльності учня, що потребує комплексного підходу до вирішення проблеми. Варто відзначити наступне: забезпечення ефективності і комфортності навчальної діяльності учнів обумовлено належним рівнем адаптованості учнів до виконання системи завдань через чітку і логічну послідовність виконання завдань на уроках і за програмами самостійної роботи. Комфортність діяльності учня в процесі виконання завдань пов’язана із задоволеністю психологічного стану, зокрема, в плані наявності теоретичної, а також і практичної підготовки до сприймання інформації, до планування діяльності, до виконання дій, маніпуляцій тощо. Останнє за дидактичними принципами має логічно пов’язуватись в часі. Відповідно важливо чітко спланувати навчально-виховний процес: передбачити виконання оптимальної кількості завдань — розв’язування якісних і кількісних задач у певній послідовності, змістом яких охоплено достатній обсяг теоретично-практичного і політехнічного матеріалу, а також виконання експериментальних завдань, зміст яких передбачає встановлення окремих залежностей, формування окремих дій (наприклад, специфічних вимірювань), маніпуляцій тощо. Потребує уваги і практична, профільна спрямованість змісту робіт фізичного практикуму.

В цілому варіант структури і змісту діяльності учнів в процесі виконання практичних і експериментальних завдань зображено на рис. 1.

Виконання зазначених в програмах лабораторних робіт недостатньо для формування в учнів належних вмінь використовувати здобуті знання в наступних етапах навчання і подальшій діяльності. Існує потреба в розширенні змісту і обсягу експериментальних завдань.

Особистісно орієнтоване навчання передбачає забезпечення комфортних умов для навчальної праці — організації навчальних занять і самостійної діяльності на основі динаміки розумової працездатності.

Варіант планування, окрім викладення навчального матеріалу вчителем, складають практичні та експериментальні завдання, виконання яких спрямоване на досконале формування знань, їх закріплення і застосування до розв’язування задач і експериментальних завдань. Організація виконання завдань здійснюється в чіткій послідовності дотримування етапів. Кожний такий етап складають

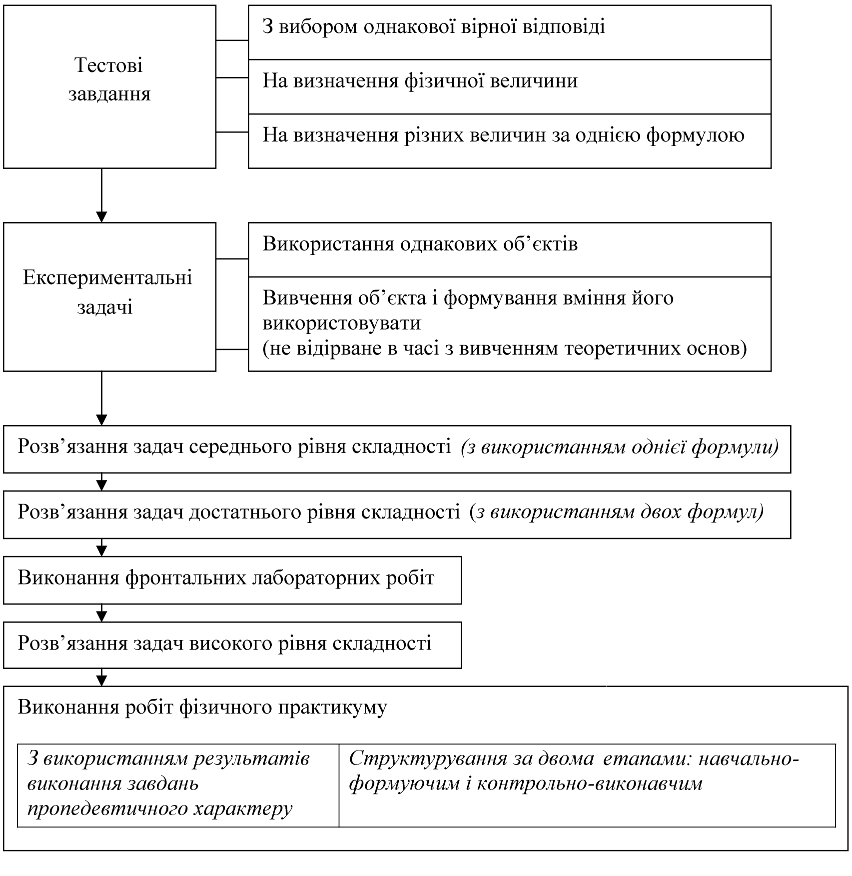


Рис. 1. Комплексний підхід до планування змісту і виконання експериментальних завдань

завдання певного типу з вузько обмеженою метою виконання. Як приклад наводимо тестові запитання та експериментальні завдання до вивчення законів постійного струму.

Першими виконують тестові завдання початкового рівня, спрямовані на досконале формування одиниць знань: окремих понять, залежностей, властивостей, характеристик, одиниць вимірювання. Варто мати на увазі, що для повноти охоплення сутності кожної одиниці знань учневі необхідно виконати мінімум три завдання. Це можуть бути тестові запитання з вибором відповіді. За ними виконуються завдання, які включають запитання щодо визначення однакової за сутністю відповіді, але, відповідно, різними шляхами до кожного запитання.

1. Тестові запитання

Тестові запитання з однаковим варіантом відповіді.

1. Як називається характеристика відокремленого провідника, що залежить від матеріалу, з якого він виготовлений?

2. Яку фізичну величину вимірюють в омах?

3. Яка властивість провідника залежить від його геометричних розмірів?

Варіанти відповідей:

А. Колір. Б. Електроємність. В. Опір.

1. Як залежить активний опір провідника від його довжини?

2. Як залежить провідність провідника від його площі поперечного перерізу?

3. Як залежить активний опір провідника від його температури?

Варіанти відповідей:

А. Обернено пропорційно. Б. Пропорційно. В. Не залежить.

1. Як залежить активний опір провідника від сили струму, що по ньому протікає?

2. Як залежить активний опір провідника від прикладеної напруги?

3. Як залежить активний опір провідника від діелектричної проникності оточуючого середовища?

Варіанти відповідей:

А. Обернено пропорційно. Б. Пропорційно. В. Не залежить.

Тестові запитання з вибором вірної відповіді з однакового їх переліку.

1. Виберіть правильну формулу для обчислення опору провідника.

2. Виберіть правильну формулу для обчислення опору двох резисторів, з'єднаних послідовно.

3. Виберіть правильну формулу для обчислення опору двох резисторів, з'єднаних паралельно.

Варіанти відповідей:

А. $R = \frac{U}{I}$. Б. $R = R_1 + R_2$. В. $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

1. За якою формулою визначають кількість теплоти, яка виділяється у провіднику за протікання електричного струму?

2. За якою формулою визначають опір провідника?

3. За якою формулою визначають силу струму у провіднику?

Варіанти відповідей:

А. $R = \rho\frac{l}{S}$. Б. $Q = I^2Rt$. В. $I = \frac{q}{t}$.

1. Вкажіть на неправильний вираз щодо обчислення опору паралельно з'єднаних n провідників з однаковим опором Rn.

2. Вкажіть на правильний вираз щодо обчислення роботи електричного струму.

3. За яким виразом можна обчислити напругу на ділянці електричного кола?

Варіанти відповідей:

А. $A = UIt$. Б. $U = \frac{A}{q}$. В. $R = \frac{R_n}{n}$.

Аналогічну мету передбачає виконання частини наступних завдань другого етапу, характерних перенесенням сформованих раніше знань на розв'язування задач середньої складності, здебільшого на використання однієї формули, знову ж відповідно різної для кожного завдання. Кожний учень повинен розв'язати принаймні три задачі на визначення однієї величини з різних співвідношень (за різними формулами) та три задачі на визначення різних величин за однією формулою. Учням повідомляють про подальше використання методів розв'язання задач, а тому вимагається виконання записів розв'язків у робочому зошиті.

2. Завдання для формування окремих вмінь розв'язання задач (середній рівень)

1. Мідний дріт має довжину 340 м і площу поперечного перерізу 0,10 мм^2. Питомий опір міді $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Визначити опір дроту.

2. У резисторі за прикладеної напруги 10 В протягом 1 хвилини виділяється енергія 105,26 Дж. Який опір резистора?

3. По провіднику за прикладеної напруги 285 В протікає струм силою 5 А. Який опір провідника?

Варіанти відповідей:

А. R = 5,7 Ом. Б. R = 570 Ом. В. R = 57 Ом.

1. При з'єднанні лампочки з батареєю елементів із ЕРС 4,5 В вольтметр показав напругу на лампочці 4 В, а амперметр силу струму 0,25 А. Який внутрішній опір батареї?

2. При підключенні реостата до джерела з ЕРС 10 В і внутрішнім опором 0,5 Ом протікає струм 4 А. Який опір введеної ділянки реостата?

3. Провідником, до кінців якого прикладена напруга 12 В, за 2 с пройшов заряд 12 Кл. Який опір провідника?

Варіанти відповідей:

А. 1 Ом. Б. 2 Ом. В. 4 Ом.

Аналогічним чином формують третій етап — виконання завдань достатнього рівня (на використання 2—3 формул).

3. Завдання для формування окремих вмінь розв'язання задач (достатній рівень)

1. Яка потужність електричного струму при проходженні заряду 20 Кл по провіднику опором 0,5 Ом протягом 2 с?

2. Яка потужність кип'ятильника за прикладеної напруги 100 В до його нагрівального елемента, що має опір 2 Ом?

3. Якою стане потужність електричного нагрівника, що живиться струмом з напругою 110 В за умови переключення нагрівальних елементів з послідовного на паралельне з'єднання, якщо за початкових умов його потужність становила 12,5 Вт?

Варіанти відповідей:

А. 1000 Вт. Б. 500 Вт. В. 50 Вт.

Виконання експериментальних задач не повинно бути відірване в часі з вивченням теоретичних основ. Разом з тим, якщо результати виконання таких завдань слугують пропедевтикою для виконання інших задач, або фронтальних лабораторних робіт, то така послідовність має бути чітко витриманою в плануванні. Це досить важливо і для забезпечення мотивації їх виконання, без чого комфортність не може бути достатньою. При застосуванні компетентнісного підходу в старшій школі навчальний фізичний експеримент як органічна складова методичної системи навчання фізики забезпечує формування в учнів необхідних практичних вмінь, дослідницьких навичок та особистісного досвіду експериментальної діяльності, завдяки чому вони стають спроможними, в межах набутих знань, розв'язувати пізнавальні завдання засобами фізичного експерименту, який в шкільному навчанні розв'язує ряд завдань [8, 9—15].

У формуванні вмінь і навичок практичної діяльності учнів старшої школи вагоме місце належить самостійній роботі, яка базується на принципі вільного вибору. Створення умов для здійснення самостійного вибору завдань забезпечується їх варіативністю, що має забезпечити кожного учня можливістю працювати відповідно до своїх здібностей, разом вагомо сприяючи розвитку їх творчого мислення [4].

II. Експериментальні задачі

1. Дослідження залежностей між силою струму, напругою і опором провідника.

2. Визначення опору провідника за допомогою амперметра і вольтметра та вимірювання мультиметром.

III. Фронтальні лабораторні роботи

1. Послідовне і паралельне з'єднання провідників.

2. Визначення питомого опору провідника.

3. Регулювання сили струму і напруги в колах постійного струму.

Важливою рисою робіт фізичного практикуму є практична і політехнічна спрямованість їхнього змісту і методів виконання. Завдання робіт фізичного практикуму складають: переважно кількісна перевірка фізичних законів, дослідження різних умов та їх впливу на перебіги фізичних процесів з використанням моделей і промислових зразків технічних установок, фізичних основ технологічних процесів, формування практичних навичок і політехнічних знань. Також для робіт практикуму характерна обмеженість умов для забезпечення диференціації навчання — варіювання змістом і рівнем складності завдань. Аналіз змісту підготовки до виконання завдань свідчить про наявність прогалин у формуванні в учнів окремих умінь і навичок. В процесі добору і розробки експериментальних завдань для учнів потрібно враховувати фактор творчої самостійності й можливість вільного вибору учнем зручного для нього варіанта. Рівень творчості учня визначається ступенем самостійності: чим він вищий, тим краще він реалізує свій творчий потенціал, тим більше можливостей для розвитку його дивергентного мислення. Кращому розкриванню дивергентності сприяє відкритість питань щодо бачення й аналізу різних підходів до виконання завдання. На пошуковому рівні з'являється простір для розвитку дивергентності мислення, тому що при заданій меті завдання й визначеному переліку обладнання учневі невідомий шлях виконання завдання. Шлях він обирає самостійно з можливих варіантів, відповідно тут проявляється творчий підхід.

Вищим ступенем є виконання дослідницьких лабораторних робіт, коли для учня визначається лише мета завдання. Д. Б. Богоявленська учнівську творчість визначає як «...здібності до ситуативно нестимульованої пізнавальної діяльності, або здібності до пізнавальної самодіяльності» [2]. За С. В. Анофріковою [1] будь-яка людська діяльність має такі структурні елементи: мету, предмет, знаряддя, програму та кінцевий результат. Основними етапами виконання учнями експериментального завдання є: формулювання мети, вибір предмета дослідження, відбір обладнання, складання алгоритму діяльності, виконання експерименту, оцінка одержаних результатів.

Корисно, якщо задачею високого рівня складності охоплено зміст завдання роботи фізичного практикуму, як це наведено в даному варіанті.

Задача: Будинок лісника підключено до електромережі за допомогою довгого кабелю з досить великим опором. Лісник помітив, що два однакові чайники закипають при послідовному і паралельному підключенні за один і той самий час. Чому дорівнює опір кабелю, якщо кожний з чайників споживає при напрузі 220 В потужність 400 Вт?

При створенні умов для організації постановки різнорівневих завдань наявність матері-

Дано:

$U = 220$ В

$P = 400$ Вт

$t_{\text{посл}} = t_{\text{пар}}$

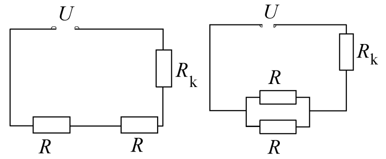
R_k – ?

Розв'язок:

За законом для послідовного та паралельного з'єднання провідників:

$R_{\text{посл}} = 2R$; $R_{\text{пар}} = \frac{R}{2}$.

Згідно зі схемами:



$$I_{\text{посл}} = \frac{U}{2R + R_k}; \quad I_{\text{пар}} = \frac{U}{\frac{R}{2} + R_k} \quad (1)$$

За законом Джоуля-Ленца для нагрівання чайників:

$Q = I^2 Rt$

Відповідно до типів з'єднань:

$Q_{\text{посл}} = I^2_{\text{посл}} 2Rt_{\text{посл}}$

$Q_{\text{пар}} = I^2_{\text{пар}} \frac{R}{2} t_{\text{пар}}$

Чайники за умовою закипають за один і той самий час, отже і кількість теплоти, що витрачається для їх нагрівання, буде однаковою:

$Q_{\text{посл}} = Q_{\text{пар}}$

$I^2_{\text{посл}} 2Rt_{\text{посл}} = I^2_{\text{пар}} \frac{R}{2} t_{\text{пар}}$

Врахуємо формули (1):

$$\left(\frac{U}{2R + R_{\text{k}}}\right)^2 2Rt_{\text{посл}} = \left(\frac{U}{\frac{R}{2} + R_{\text{k}}}\right)^2 \frac{R}{2} t_{\text{пар}}$$

За умови $t_{\text{посл}} = t_{\text{пар}}$:

$$\frac{2}{2R + R_{\text{k}}} = \frac{1}{\frac{R}{2} + R_{\text{k}}}$$

$$\frac{2}{2R + R_{\text{k}}} = \frac{2}{R + 2R_{\text{k}}} \qquad \boxed{R = R_{\text{k}}}$$

Отже: $\boxed{R_{\text{k}} = \frac{U^2}{P}}$

$$R_{\text{k}} = \frac{220^2}{400} = 121 \text{ (Ом)}$$

ального забезпечення має сприяти вирішенню таких завдань [4; 7]: вибір виконання завдання лабораторної роботи з різним обладнанням; вибір виконання завдання лабораторної роботи іншим способом; виконання завдання різними способами, порівняння їх ефективності; оцінка якості та ефективності використання того чи іншого обладнання; дослідження залежності між фізичними величинами; визначення інших умов для виконання завдання.

IV. Роботи фізичного практикуму

1. Вимірювання опору провідника за допомогою містка Уітстона.

2. Дослідження залежності споживаної потужності двох однакових споживачів при послідовному і паралельному з'єднанні від опору підвідних провідників.

Матеріально-технічне забезпечення сучасних навчальних лабораторій вузів не забезпечує можливість організації виконання визначеного циклу завдань. Для матеріального забезпечення нами використано традиційне обладнання з окремими доробками і модифікаціями. При цьому ми керувались новітніми підходами і пропозиціями фахівців, зокрема, впровадженням блочно-функціонального принципу [5] до методичного і матеріального забезпечення, розширення універсальних і інтеграційних властивостей і якостей обладнання тощо. Вагомим доробком для вирішення таких проблем слугує набірне поле «Школяр». Доукомплектування його мультиметрами (або полігоном цифрових вимірювань) суттєво підвищує якість і ефективність організації виконання експериментальних завдань в умовах сучасного освітнього середовища.

Література

1. *Анофрикова С. В.* Не учить самостоятельности, а создавать условия для её проявления // Физика в школе. — 1995. — № 3. — С. 38—46.
2. *Богоявленская Д. Б.* О предмете и методе исследования творческих способностей // Психологический журнал. — 1995. — Т. 16, № 5. — С. 49—58.
3. *Болотов В. А., Сериков В. В.* Компетентносная модель: от идеи к образовательной программе // Перемены. — 2004. — № 2. — С. 130—139.
4. *Коробова І. В.* Рівневий підхід до виконання лабораторних робіт як умова розвитку творчого мислення учнів // Фізика та астрономія в школі. — 1998. — № 4. — С. 45—47.
5. *Коршак Є. В.* Методичне обґрунтування блочно-функціонального принципу у вивченні елементів радіоелектроніки // Фізика та астрономія в школі. — 1998. — № 4. — С. 8—10.
6. *Ляшенко О. І.* Проблема оновлення змісту загальної середньої освіти // Директор школи, ліцею, гімназії. — 2002. — № 6. — С. 18—21.
7. *Ментова Н. О.* Експеримент при вивченні електроємності в школі // Фізика та астрономія в школі. — 2007. — № 5—6. — С. 36—39.
8. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Фізика. Астрономія. 7—12 класи. — К.: Ірпінь, 2005. — 80 с.
9. *Рягин С. Н.* Проектирование содержания профильного обучения в старшей школе // Школьные технологии. — 2003. — № 2. — С. 121—129.

В. П. ВОВКОТРУБ,
доктор пед. наук, професор, Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В. Винниченка,

Н. В. МАНОЙЛЕНКО,
аспірантка кафедри фізики та методики її викладання, Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В. Винниченка.

УДК [371.26:51]

РІВНЯННЯ З «ТРИКРАПКАМИ», АБО ДЕЩО ПРО ІТЕРАЦІЇ ТА ГРАНИЦІ

Розглядаються рівняння, в яких деяка операція повторюється багато разів. Для розв'язання таких задач пропонується метод ітерацій.

The equations with infinite repeating operatios are considered. The method of iterations is suggested for solving of such equations.

Математичні моделі реальних процесів і методи комп'ютерних обчислень спричиняють задачі, які містять перетворення, що повторюються багато разів. Тому в математиці зустрічаються вирази, які містять нескінченну кількість операцій.

Три крапки саме і слугують для позначення необмеженої кількості операцій у таких виразах.

Насамперед для таких виразів потрібно подати чіткі означення. Наприклад, праву частину рівняння

$$x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = 1,$$

яка містить нескінченну кількість доданків, можна розуміти як границю послідовності $\{S_n, n \geqslant 1\}$, де $S_n = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$ і приписати їй число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Тоді права частина буде мати сенс при $|x| < 1$ (нескінченно спадна геометрична прогресія), а тому $S = \dfrac{x}{1-x}$ і рівняння набуває вигляду $\dfrac{x}{1-x} = 1$, звідки $x = \dfrac{1}{2}$.

Якщо ж розглядаючи вирази, що містять нескінченну кількість доданків, використовувати властивості, притаманні виразам, що містять скінчене число доданків, то можна отримати парадоксальні рівності. Справді, позначимо через S суму доданків наступного виразу

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots .$$

Далі виконаємо наступні перетворення:

1) $S = 1 - (1 + 1 - 1 + 1 - \ldots) = 1 - S \Rightarrow S = \dfrac{1}{2}$;
2) $S = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots = 0$;
3) $S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - \ldots = 1$;
4) $S = -1+1+1-1+1-\ldots = -1+(1-1)+(1-1)+\ldots = -1$ (тут ми поміняли місцями сусідні доданки).

Отже, $S = \dfrac{1}{2} = 0 = 1 = -1$.

В статті, яка пропонується до уваги читачів, розглядаються саме такі рівняння, які містять вирази $f_\infty(x)$ (нескінченна кількість операцій), і при цьому $f_\infty(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, де у виразі $f_n(x)$ операція зустрічається n разів.

Розглядається також поведінка послідовностей вигляду x, $f(x)$, $f(f(x))$, ...

Задачі такого типу часто зустрічаються на олімпіадах. В кожній з таких задач потрібно виконати певне дослідження: чітко з'ясувати, про який вираз йдеться, побудувати деяку послідовність і довести існування границі.

1. Рекурентні формули і границі.

Розглянемо наступне рівняння:

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x\ldots}}}} = 3. \quad (1)$$

Розв'язування рівняння (1), як правило, виконують так: нехай число a є коренем рівняння (1), тобто

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots\sqrt{a\ldots}}}} = 3.$$

Позначимо $\sqrt{a\sqrt{a\ldots\sqrt{a\ldots}}} = b$. Тоді, з одного боку, $b = 3$, а з іншого, $\sqrt{ab} = 3$, тобто $ab = 9$, $3a = 9$, $a = 3$.

Отже, $x = 3$ є коренем рівняння.

Чи все нас задовольняє у наведеному розв'язуванні? Очевидно, що ні. Адже рівняння $\sqrt{3a} = 3$ є наслідком рівняння (1), а тому необхідно виконати перевірку за допомогою, наприклад, безпосереднього підставлення значення $x = 3$ в рівняння (1). Зазначимо, що відсутність перевірки у наведеному розв'язуванні є істотним недоліком. Проте після підставлення виникають логічні труднощі, пов'язані з необхідністю надати сенс виразу $A = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots}}}$, оскільки ліва частина рівняння (1) містить нескінченну кількість операцій добування кореня. Отже, природно постає питання: як саме розуміти вираз, записаний у лівій частині рівняння (1)?

Для того, щоб отримати відповідь на поставлене запитання, запропонуємо інший підхід до розв'язування рівняння (1), а саме розглянемо наступну послідовність дійсних чисел: $a_1 = \sqrt{x_0}$, $a_2 = \sqrt{x_0\sqrt{x_0}}$, $a_3 = \sqrt{x_0\sqrt{x_0\sqrt{x_0}}}$, ... Тоді маємо $a_2 = \sqrt{x_0 a_1}$, $a_3 = \sqrt{x_0 a_2}$, і взагалі $a_{n+1} = \sqrt{x_0 a_n}$, де $x_0 \geqslant 0$ — довільне фіксоване число.

Покажемо, що отримана послідовність $\{a_n, n \geqslant 1\}$ має границю.

Розглянемо два випадки.

1) Нехай $0 < x_0 < 1$. Тоді $a_1 = \sqrt{x_0} > x_0$, $a_2 = \sqrt{x_0 a_1} > \sqrt{x_0^2} > x_0$. Припустимо, що $a_n > x_0$, а тому $a_{n+1} = \sqrt{x_0 a_n} > x_0$. Отже, за методом математичної індукції доведено, що $a_n > x_0$, $\forall\, n \in \mathrm{N}$, тобто послідовність $\{a_n, n \geqslant 1\}$ є обмеженою знизу. Крім того, послідовність є спадною, бо

$$a_{n+1} = \sqrt{x_0 a_n} < \sqrt{a_n^2} < a_n, \ \forall\, n \in \mathrm{N}.$$

Таким чином, за теоремою Вейерштрасса послідовність має границю.

2) Нехай $x_0 > 1$. Тоді легко довести, що $a_{n+1} > a_n$ і $a_n < x_0$, тобто і в цьому випадку послідовність $\{a_n, n \geqslant 1\}$ має границю. Позначимо її через s, тобто маємо

$$\lim_{n\to\infty} a_n = s.$$

Тоді $s > 0$ і $s = \sqrt{x_0 s}$, звідки $\left[\begin{array}{l} s = 0, \\ s = x_0 \end{array}\right.$, а тому $s = x_0$.

Таким чином, маємо для всіх $x \geqslant 0$

$$B = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x\ldots}}}} = x \quad (2)$$

(при $x = 0$, $x = 1$ рівність є очевидною), причому вираз B розуміємо як границю послідовності $\{a_n, n \geqslant 1\}$

$$a_1 = \sqrt{x}, \ a_2 = \sqrt{x\sqrt{x}}, \ a_3 = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}, \ \ldots,$$

тобто

$$B = \lim_{n\to\infty} a_n = x.$$

Це означає, що рівняння (1) має корінь $x = 3$.

Отже, на відміну від попереднього розв'язування ліву частину рівняння (1) ми спочатку визначили як границю числової послідовності, довели існування цієї границі. Послідовність задали рекурентною формулою $a_n = \varphi(a_{n-1})$, де $\varphi(x) = \sqrt{kx}$, $k = x_0 > 0$.

Переконавшись, що послідовність a_n є збіжною, дійшли до висновку, що її границя задовольняє рівність $s = \sqrt{x_0 s}$, тобто є коренем рівняння

$$\varphi(x) = x. \quad (3)$$

Інші приклади відшукування границь монотонних послідовностей наведено в [1].

Перехід до границі у рекурентній формулі є обґрунтованим на підставі наступного твердження.

Теорема 1. Якщо послідовність $\{a_n, n \geqslant 1\}$ збігається до числа s, і функція φ є неперервною при $x = s$, то s є коренем рівняння (3).

Справді, з огляду на неперервність функції $\varphi(x)$ маємо

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(a_{n-1}) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} a_{n-1}\right) = \varphi(s),$$

а тому $s = \varphi(s)$, тобто s є коренем рівняння (3).

За допомогою поняття границі тепер можемо виконати перевірку першого розв'язання, а саме: розглянемо послідовність $\{a_n, n \geqslant 1\}$

$$a_1 = \sqrt{3}, \ a_2 = \sqrt{3\sqrt{3}}, \ a_3 = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \ \ldots,$$

і будемо розуміти вираз $A = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots}}}$ як границю цієї послідовності $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (якщо звичайно ця границя існує). Справді, оскільки

$$a_n = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot \ldots \cdot 3^{\frac{1}{2^n}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$$

і

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1,$$

то беручи до уваги неперервність показникової функції $y = 3^x$, отримаємо

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}\right) = 3^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)} = 3.$$

Якщо не використовувати неперервність показникової функції, то існування границі можна довести ще й так. Оскільки

$$a_n = \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2^n]{3} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}} = 3^{1-\frac{1}{2^n}} = \frac{3}{3^{\frac{1}{2^n}}}$$

і при $n > 2$

$$3 = \left(3^{\frac{1}{2^n}}\right)^{2^n} = \left(1+\left(3^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\right)^{2^n} > \left(1+\left(3^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\right)^{n} =$$

$$= 1 + n\left(3^{\frac{1}{2^n}}-1\right) + \ldots + \left(3^{\frac{1}{2^n}}-1\right)^n > n\left(3^{\frac{1}{2^n}}-1\right),$$

тобто $0 < 3^{\frac{1}{2^n}} - 1 < \dfrac{3}{n}$, звідки $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{2^n}} = 1$, а тому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

Тут ми використали монотонність показникової функції, формулу бінома Ньютона, а також теорему про границю проміжної послідовності.

2. Рівняння вигляду

$$\underbrace{f\left(f\left(f\left(\ldots f\left(x\right)\right)\right)\ldots\right)}_{n}=x \quad (4)$$

Тут в лівій частині (4) розглядається суперпозиція n функцій $f: M \to M$, тобто застосування одного і того ж правила f n разів, де $n \geqslant 2$.

Теорема 2. Нехай $f(x)$ є функція, яка зростає на множині M і нехай для будь-якого $x \in M$ значення функції належить M. Тоді рівняння $f(f(x)) = x$ та $f(x) = x$ є рівносильними.

Доведення. Нехай x_0 є коренем рівняння $f(x) = x$, тобто $f(x_0) = x_0$. Оскільки $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$, то $f(f(x_0)) = x_0$, тобто x_0 є коренем рівняння $f(f(x)) = x$. Правильним є і обернене твердження. Справді, нехай x_0 є коренем рівняння $f(f(x_0)) = x_0$. Припустимо, що x_0 не є коренем рівняння $f(x_0) = x_0$. Не зменшуючи загальності міркувань, будемо вважати, що $f(x_0) < x_0$. Тоді з огляду на те, що $f(x)$ зростає на M, отримаємо

$$f(f(x_0)) < f(x_0) < x_0.$$

Суперечність. Аналогічними є міркування і для випадку $f(x_0) > x_0$. Отже, $f(x_0) = x_0$.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння

$$(x^3+2x+2)^3 + 2(x^3+2x+2) + 2 = x.$$

♦ Розглянемо функцію $f(x) = x^3+2x+2$. Тоді рівняння набуває вигляду

$$f(f(x)) = x.$$

Оскільки $f'(x) = 3x^2+2 > 0$ для всіх x, то функція $f(x)$ є зростаючою на всій числовій осі, а тому на підставі теореми 2 рівняння є рівносильним рівнянню $f(x) = x$, тобто рівнянню $x^3+2x+2 = x$, звідки маємо

$$x^3+x+2=0 \Leftrightarrow (x^3+1)+(x+1)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+2)=0.$$

Відповідь: $x = 1$.♦

Теорема 3. Нехай функція $f(x)$ на множині M задовольняє наступні умови:

1) для будь-якого $x \in M$ значення функції належить M;

2) функція f є зростаючою на множині M.

Тоді рівняння $\underbrace{f\left(f\left(f\left(\ldots f\left(x\right)\right)\right)\ldots\right)}_{n}=x$ і $f(x)=x$ є рівносильними.

Доведення виконаємо за методом математичної індукції. Для $n = 2$ за теоремою 2 рівняння $f(f(x)) = x$ і $f(x) = x$ є рівносильними на множині M. Припустимо, що для $n = k$ рівняння $\varphi(x)=\underbrace{f\left(f\left(f\left(\ldots f\left(x\right)\right)\right)\ldots\right)}_{k}=x$ і $f(x)=x$ є рівносильними на множині M. Нехай x_0 є коренем рівняння $f(x_0) = x_0$. Тоді $\varphi(x_0) = x_0$, а тому $f(\varphi(x_0)) = f(x_0) = x_0$, тобто x_0 є коренем рівняння $\underbrace{f\left(f\left(f\left(\ldots f\left(x\right)\right)\right)\ldots\right)}_{k+1}=x$.

Обернено. Нехай x_1 є коренем рівняння (4) і не є коренем рівняння $f(x) = x$, тобто $f(x_1) \neq x_1$. Тоді $\varphi(x_1) \neq x_1$, а тому

$$f(f(f(\ldots f(x_1)))\ldots) = f(\varphi(x_1)) \neq f(x_1) \neq x_1.$$

Суперечність.

Зауваження 1. Якщо f зростає на області визначення, то рівняння $f(x) = x$ і рівняння (4) є рівносильними.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння

$$\underbrace{\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+x}}}_{2009}=x$$

(знак радикала записано 2009 разів).

Розглянемо функцію $f(x)=\sqrt{2+x}$. Тоді рівняння можна подати у вигляді $\underbrace{f\left(f\left(f\left(\ldots f\left(x\right)\right)\right)\ldots\right)}_{2009}=x$. Оскільки функція f є зростаючою на множині $M = [-2;+\infty)$, то за теоремою 3 дане рівняння є рівносильним рівнянню

$$\sqrt{2+x}=x \quad \Leftrightarrow x = 2.$$

Відповідь: $x = 2$.

Приклад 3. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3+2x^2+2x=y, \\ y^3+2y^2+2y=z, \\ z^3+2z^2+2z=x. \end{cases}$$

♦ Розглянемо функцію $f(x) = x^3+2x^2+2$. Тоді дану систему можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} f(x)=y, \\ f(y)=z, \\ f(z)=x, \end{cases} \text{звідки } f(f(f(x))) = x.$$

Оскільки $f'(x) = 3x^2+4x+2 > 0$, то $f(x)$ зростає на всій числовій осі, а тому за теоремою 3

$$f(f(f(x))) = x \;\Leftrightarrow\; f(x) = x.$$

Рівняння $x^3+2x^2+2x = x$ має корені $x = 0$ і $x = -1$. Підставляючи знайдені значення коренів у вихідну систему, послідовно знаходимо: якщо $x=-1$, то $y=-1$, $z=-1$; якщо $x=0$, то $y=0$, $z=0$.

Відповідь: $(-1;-1;-1)$, $(0;0;0)$.♦

Зауваження 2. Якщо $f(x)$ не є зростаючою функцією, то рівняння $f(f(x))=x$ і $f(x)=x$ не є рівносильними. У цьому випадку $f(x)=x \Rightarrow f(f(x))=x$, тобто всі корені рівняння $f(x)=x$ є коренями рівняння $f(f(x))=x$. Натомість обернене твердження не виправдовується.

Наведемо такий відомий приклад.

Розглянемо функцію $f(x)=\left(\frac{1}{16}\right)^x$. Рівняння $\left(\frac{1}{16}\right)^x=x$ має єдиний розв'язок (позначимо його x_0), бо $f(x)$ спадає на всій числовій осі як показникова функція з основою $a=\frac{1}{16}<1$ і водночас $g(x)=x$ зростає. А тепер розглянемо рівняння $f(f(x))=x$, тобто

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\left(\frac{1}{16}\right)^x}=x.$$

Прологарифмуємо обидві частини даного рівняння за основою $a=\frac{1}{16}$. Дістанемо рівносильне рівняння $\left(\frac{1}{16}\right)^x=\log_{\frac{1}{16}}x$, яке має три корені $x=x_0$; $x=\frac{1}{2}$; $x=\frac{1}{4}$, тобто $x=\frac{1}{2}$ і $x=\frac{1}{4}$ не є коренями рівняння $f(x)=x$.

Приклад 4. Скільки розв'язків має рівняння $a^{a^x}=x$ в залежності від параметра a, де $a\in(1;+\infty)$.

♦ Розглянемо функцію $f(x)=a^x$, де $a>1$. Оскільки функція $f(x)=a^x$ $(a>1)$ є зростаючою, то рівняння $f(f(x))=x$ і $f(x)=x$ є рівносильними, а тому будемо досліджувати рівняння

$$a^x=x, \text{ де } a>1.$$

Дане рівняння є рівносильним рівнянню

$$\ln a=\frac{\ln x}{x},\ x>0.$$

Побудуємо графік функції $y=\frac{\ln x}{x}$. З цією метою знайдемо похідну $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$. Звідси $y'=0$, якщо $x=e$. При $0<x<e$ $y'>0$, а тому функція зростає на цьому проміжку; при $x>e$ $y'<0$, а тому функція є спадною на проміжку $(e;+\infty)$. Отже, $x=e$ — точка максимуму і $y(e)=\frac{1}{e}$. Крім того, $\lim\limits_{x\to0+}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\left(\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. Далі визначимо, скільки існує точок перетину графіка функції $y=\frac{\ln x}{x}$ та прямої $y=\ln a$ (рис. 1).

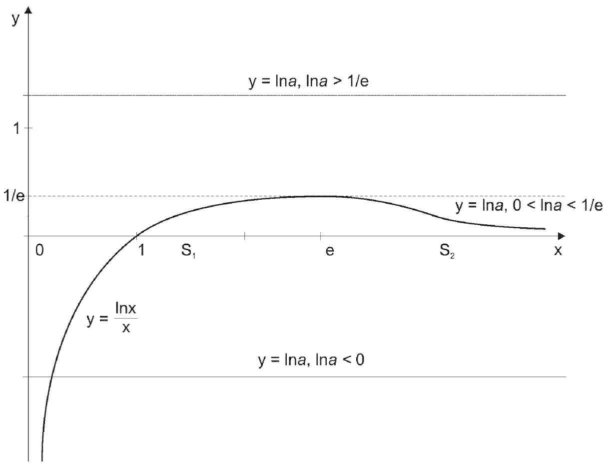


Рис. 1

При $\ln a>\frac{1}{e}$, тобто при $a>e^{\frac{1}{e}}=1{,}444...$ рівняння розв'язків не має. При $0<\ln a<\frac{1}{e}$, тобто при $1<a<e^{\frac{1}{e}}$, рівняння має два корені. Позначимо їх $s_1<s_2$. Корінь $x=s_1\in(0;e)$, корінь $s_2\in(e;+\infty)$. При $a=e^{\frac{1}{e}}$ рівняння має єдиний корінь.♦

До цього часу ми розглядали випадки, коли операція f повторювалася скінченне число разів. Якщо число таких операцій стає нескінченним, то формальні перетворення, які виконуються без належного логічного обґрунтування, можуть приводити до хибних тверджень. Звернемось до прикладу.

Розглянемо рівняння

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2. \quad (5)$$

Його можна переписати у вигляді $x^2=2$, звідки $x=\sqrt{2}$, а тому

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2.$$

Розглянемо інше рівняння

$$y^{y^{y^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=4. \quad (6)$$

Його можна переписати у вигляді $y^4 = 4$, звідки $y = \sqrt{2}$, а тому

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 4.$$

Звідси випливає, що $2 = 4$. Дістали хибне твердження. Таким чином, принаймні одна з рівностей є неправильною. Зрозуміло, що є потреба надати сенсу виразу

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}. \quad (7)$$

З цією метою використаємо поняття границі, а саме: розглянемо питання про збіжність послідовності

$$1,\ a,\ a^a,\ a^{a^a},\ a^{a^{a^a}},\ \ldots, \quad (8)$$

тобто $\alpha_0 = 1$, $\alpha_n = a^{\alpha_{n-1}} = \varphi(\alpha_{n-1})x$, де $\varphi(x) = a^x$.

Відповідно до теореми 1, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = s$, то s є коренем рівняння $a^x = x$, бо функція $\varphi(x) = a^x$ є неперервною на всій числовій осі. Зрозуміло, що коли рівняння $a^x = x$ при деякому a не має коренів, то відповідна послідовність не буде мати границі, тобто буде розбіжною. При $a > 1$ послідовність є зростаючою, крім того, при $1 < a < e^{\frac{1}{e}} = 1{,}444...$ рівняння $a^x = x$ має два корені. Виникає питання: до якого з двох коренів при таких a збігається послідовність (8)? Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 4. При $a > 1$ послідовність (8) збігається тоді і тільки тоді, коли рівняння $a^x = x$ має хоча б один корінь. В цьому випадку границя послідовності (8) дорівнює меншому з коренів рівняння $a^x = x$.

Доведення. Покажемо спочатку, що послідовність (8) є зростаючою: $\alpha_1 = a > 1 = \alpha_0$. Нехай для деякого натурального $n > 1$ $\alpha_n > \alpha_{n-1}$. Тоді

$$\alpha_{n+1} = a^{\alpha_n} > a^{\alpha_{n-1}} = \alpha_n.$$

Вище ми вже зазначали, що коли послідовність є збіжною, то її границя є коренем рівняння $a^x = x$. Нехай тепер рівняння $a^x = x$ має корені. Позначимо через s_0 найменший з них. Покажемо, що $\alpha_n < s_0$ для всіх натуральних n. Доведення знову подамо за методом математичної індукції. Легко побачити, що $1 = \alpha_0 < s_0$. Нехай $\alpha_n < s_0$. Тоді

$$\alpha_{n+1} = a^{\alpha_n} < a^{s_0} = s_0.$$

Отже, за теоремою Вейєрштрасса послідовність (8) збігається, і границею цієї послідовності є число s_0. Оскільки $1 < \sqrt{2} < 1{,}42 < e^{\frac{1}{e}}$, то рівняння $\left(\sqrt{2}\right)^x = x$ має рівно два корені, і послідовність $\sqrt{2}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \ldots, \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}, \ldots$ буде збігатися до меншого з цих коренів. Ці корені легко вгадуються: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. Таким чином, границя даної послідовності дорівнює 2, і якщо виразу (7) надати вказаний вище сенс, то правильною є рівність (5), а (6) є неправильною. Як бачимо, питання про збіжність послідовності (8) зведено до питання про число коренів рівняння $a^x = x$ при $a > 1$. В роботах [2], [3] доведено, що послідовність (8) збігається також і при $a \in \left[e^{\frac{1}{e}};\ 1\right)$. При цьому питання про збіжність послідовності (8) при $0 < a < 1$ в [2] зводиться до питання про число коренів рівняння $a^{a^x} = x$.

В роботі [4] також досліджується питання про збіжність при $a > 1$ послідовності $\left\{a,\ a^a,\ a^{a^a}, \ldots\right\}$. Пошуки потрібних значень параметра a ґрунтуються на існуванні критичного значення $a_0 > 1$ і такого, що при $a > a_0$ послідовність розбігається, а при $1 < a \leqslant a_0$ збігається. Таке значення знаходиться з умови дотику графіків функцій $y = a^x$ і $y = x$. Справді, нехай x_0 — абсциса точки дотику. Тоді маємо систему рівнянь відносно a і x_0:

$$\begin{cases} a^{x_0} = x_0, \\ a^{x_0}\ln a = 1, \end{cases}$$

звідки $x_0 = \dfrac{1}{\ln a}$. Тоді друге рівняння набуває вигляду $a^{\frac{1}{\ln a}} \cdot \ln a = 1$, а тому після логарифмування обох частин отримаємо

$$\frac{1}{\ln a}\cdot \ln a + \ln(\ln a) = 0 \ \Leftrightarrow\ \ln a = \frac{1}{e} \ \Leftrightarrow\ a = a_0 = e^{\frac{1}{e}}.$$

Таким чином, у підсумку можемо зазначити, що послідовність (8) збігається тоді і тільки тоді, коли $0{,}065988... = \left(\dfrac{1}{e}\right)^e \le a \le e^{\frac{1}{e}} = 1{,}44668...$.

3. Принцип відображень стиску та його застосування до наближеного розв'язання рівнянь.

Тут розглянемо принцип, який дозволяє знаходити корені рівнянь із заданою точністю. Рівняння $F(x) = 0$ записуємо у вигляді $x = f(x)$, $x \in X$. Далі вибираємо довільну точку $x_0 \in X$ і послідовно застосовуємо відображення f:

$$x_0,\ f(x_0),\ f(f(x_0)),\ f(f(f(x_0))), \ldots \quad (9)$$

Послідовність (9) називають орбітою точки x_0 при відображенні f. Нехай послідовність дійсних чисел x_0, $x_1 = f(x_0)$, ..., $x_{n+1} = f(x_n)$, ... збігається до числа a. Чи буде це число a коренем рівняння $f(x) = x$? Як можна оцінити різницю $|x_n - a|$? Перш ніж відповісти на ці запитання, введемо до розгляду наступні означення.

Означення 1. Точка $a \in X$ називається нерухомою точкою відображення $f: X \to X$, якщо $f(a) = a$.

Означення 2. Функція $f: [a;b] \to [a;b]$ називається перетворенням стиску або відображенням відрізка $[a;b]$ самого в себе, якщо існує число q, $0 < q < 1$ і таке, що для будь-яких двох точок x_1, x_2 з відрізка $[a;b]$ виконується нерівність (умова Ліфшиця)

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant q|x_1 - x_2|. \quad (10)$$

Розглянемо тепер одну дуже важливу властивість послідовності дійсних чисел, яка має границю. Вона полягає в тому, що всі досить далекі члени послідовності мало віддалені один від одного.

Означення 3. Послідовність дійсних чисел $\{x_n : n \geqslant 1\}$ називається фундаментальною, якщо для довільного додатного числа ε існує такий номер $n_0(\varepsilon)$, що члени послідовності з номерами, які перевищують $n_0(\varepsilon)$, віддалені один від одного менше, ніж на ε, тобто

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, \text{ коли } n > n_0(\varepsilon),\ m > n_0(\varepsilon).$$

Якщо послідовність $\{x_n : n \geqslant 1\}$ має границю число a, то вона є фундаментальною. Справді, нехай ε довільне додатне число. За визначенням границі для $\frac{\varepsilon}{2}$ існує такий номер $n_0(\varepsilon)$, що $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > n_0(\varepsilon)$. Нехай $m > n_0(\varepsilon)$, $n > n_0(\varepsilon)$, тоді

$$|x_m - x_n| = |x_m - x_0 + x_0 - x_n| \leq |x_m - x_0| + |x_0 - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Нехай $X = \mathbf{R}$ — множина дійсних чисел. Тоді правильним є і обернене твердження, а саме: якщо послідовність дійсних чисел є фундаментальною, то вона збігається до дійсного числа, тобто до елемента цієї ж множини. Зазначимо, що обернене твердження не завжди має місце. Наприклад, в множині $X = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ послідовність $x_n = \frac{1}{n}$ є фундаментальною. Вона має за границю число нуль, але цей елемент не належить множині $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Інший приклад. Нехай $X = \mathbf{Q}$ — множина раціональних чисел. Послідовність наближених значень числа $\sqrt{2}$ з недостачею: 1;1,4;1,41;1,414;... прямує до $\sqrt{2}$ і тому є фундаментальною. Число $\sqrt{2}$ як ірраціональне до множини $\mathbf{Q}$ не входить, тобто розглянута послідовність не має границі у множині $\mathbf{Q}$. Якщо доповнити множину $\mathbf{Q}$ множиною ірраціональних чисел I, то отримаємо множину дійсних чисел $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathrm{I}$, в якій кожна фундаментальна послідовність має границю.

Теорема 5. Нехай функція $f: [a;b] \to [a;b]$ є перетворенням стиску. Тоді рівняння $f(x) = x$ має єдину нерухому точку x^* і для будь-якої точки $x_0 \in [a;b]$ послідовність x_0, $x_1 = f(x_0)$, ..., $x_{n+1} = f(x_n)$, ..., збігається до числа x^*, причому має місце оцінка

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|. \quad (11)$$

Доведення. Оскільки f є перетворенням стиску, то згідно (10) маємо

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leqslant q|x_n - x_{n-1}| \leqslant \ldots \leqslant q^n|x_1 - x_0|$$

і

$$\begin{aligned} |x_{n+k} - x_n| &= |x_{n+k} - x_{n+k-1} + x_{n+k-1} - x_n| \leqslant \\ &\leqslant |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1} - x_n| \leqslant \ldots \\ &\leqslant |x_{n+1} - x_n| + \ldots + |x_{n+k} - x_{n+k-1}| \leqslant \\ &\leqslant (q^n + q^{n+1} + \ldots + q^{n+k-1})|x_1 - x_0|, \end{aligned}$$

звідки

$$|x_{n+k} - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|. \quad (12)$$

Остання нерівність означає, що послідовність $\{x_n : n \geqslant 1\}$ є фундаментальною, бо $0 < q < 1$, а тому $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Кожна фундаментальна послідовність дійсних чисел прямує до певного дійсного числа, а отже вказана послідовність має границю $\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \in [a;b]$. З умови (10) випливає також, що функція f є неперервною, а тому

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x^*).$$

Таким чином, x^* — нерухома точка перетворення f. Покажемо, що така точка єдина, тобто рівняння $f(x) = x$ на відрізку $[a;b]$ має єдиний корінь. Справді, якщо y і z — дві нерухомі точки, тобто $f(y) = y$ і $f(z) = z$, то з нерівності

$$0 \leqslant |y - z| = |f(y) - f(z)| \leqslant q|y - z|$$

випливає, що $|y - z| = 0$, а це означає, що точки y і z збігаються. Далі з нерівності (12) при фіксованому n і $k \to \infty$ дістанемо оцінку (11). Теорему доведено.

Таким чином, починаючи з довільної точки $x_0 \in [a;b]$, ми можемо побудувати послідовність наближень x_0, $x_1 = f(x_0)$, ..., $x_{n+1} = f(x_n)$, ..., яка прямує до невідомого розв'язання x^*. При цьому m-й член послідовності називається m-наближенням, оцінка відхилення якого від точного розв'язання подається нерівністю (11).

Метод наближеного визначення нерухомої точки відображення $f:[a;b]\to[a;b]$ або розв'язку рівняння $f(x)=x$, який ґрунтується на побудові послідовності $x_0\in[a;b]$, $x_{n+1}=f(x_n)$, $n=0,1,2,...$, називається методом послідовних наближень або методом ітерацій. Поведінку послідовності x, $f(x)$, $f(f(x))$, ... зручно також вивчати графічно, оскільки розв'язок рівняння $f(x)=x$ є абсцисою точки перетину графіків $y=f(x)$ і $y=x$.

Приклад 5. Знайдіть границю послідовності $\{x_n : n\geqslant 1\}$:

$$1,\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \dots, \quad (13)$$

де $x_1=1$, $x_{n+1}=1+\dfrac{1}{x_n}$.

З'ясуйте, як розташовані точки на числовій осі, які відповідають членам послідовності з парними і непарними номерами, відносно границі послідовності.

♦ Послідовність (13) можна подати як послідовність x, $f(x)$, $f(f(x))$, ..., де $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$.

Число $x^*=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ є нерухомою точкою відображення $f(x^*)=x^*$.

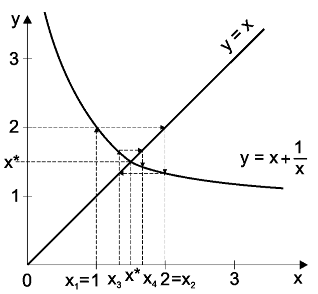


Рис. 2

На рис. 2 побудовано графік функції $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$. Зрозуміло, що точка перетину графіків $y=1+\dfrac{1}{x}$ і $y=x$ єдина, і її абсциса x^* є границею послідовності $\{x_n : n\geqslant 1\}$.

Таким чином, обчислюючи за формулою $x_{n+1}=1+\dfrac{1}{x_n}$ один за одним члени цієї послідовності $1,\ \dfrac{2}{1},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{8}{5}$, ... ми знаходимо наближення до кореня рівняння $x=1+\dfrac{1}{x}$ або $x_2-x-1=0$. Функція (відображення) $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$ є перетворенням стиску на відрізку $[1;2]$. Справді, для будь-якої пари $x_1\in[1;2]$, $x_2\in[1;2]$, $x_2>x_1\geqslant 1$

$$\left|f(x_2)-f(x_1)\right|=\left|\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right|=\frac{1}{x_1x_2}\cdot\left|x_2-x_1\right|<\left|x_2-x_1\right|.$$

Відповідно до збільшення номера n відстань $|x_n-x^*|$ прямує до нуля, а члени послідовності по черзі розташовуються то ліворуч, то праворуч від точки $x^*=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Справді, нехай $x_k<x^*$ (наприклад, $x_1=1$), тоді $\dfrac{1}{x_k}>\dfrac{1}{x^*}$ і $x_{k+1}=1+\dfrac{1}{x_k}>1+\dfrac{1}{x^*}=x^*$. Якщо $x_k>x^*$, то $\dfrac{1}{x_k}<\dfrac{1}{x^*}$ і $x_{k+1}=1+\dfrac{1}{x_k}<1+\dfrac{1}{x^*}=x^*$.

Отже, члени послідовності (13) з непарними номерами є наближеннями з недостачею, а члени послідовності з парними номерами є наближеннями з надлишком до числа x^*. Проте в міру збільшення номера n точність наближення $x_n\approx x^*$ зростає.♦

Значну кількість цікавих задач, пов'язаних з ітераціями, наведено в [5]. На практиці, зазвичай шукають корені рівнянь із заданою точністю методом послідовних наближень, тобто спираючись на теорему 5, доведення якої має конструктивний характер.

Приклад 6. Знайдіть наближений розв'язок рівняння

$$x^2+2x-1=0 \quad (14)$$

з точністю до 0,01.

♦ Виокремимо корінь даного рівняння, тобто знайдемо відрізок $[a;b]$, який містить корінь рівняння. Відрізок $[a;b]$ бажано вибирати якомога меншої довжини, тоді можна побачити, що один із коренів рівняння (14) належить відрізку $[0;0,5]$, бо неперервна функція $F(x)=x^2+2x-1$ на кінцях відрізка набуває значень протилежних за знаком. Далі подамо рівняння (14) у вигляді

$$x=\frac{1-x^2}{2}=f(x).$$

Оскільки $f'(x)=-x<0$, то функція $f(x)$ спадає на відрізку $[0;0,5]$ та відображає його на відрізок $[f(0,5);f(0)]=[0,375;0,5]$, тобто $f(x)$ відображає відрізок $[0;0,5]$ у себе.

За теоремою Лагранжа маємо

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(c)|\cdot|x_2-x_1|,\ x_1<c<x_2.$$

Отже, якщо $|f'(x)| \leqslant q < 1$, $\forall x \in [a;b]$, то функція f є перетворенням стиску.

Умова $|f'(x)| = |-x| \leqslant 0{,}5 = q < 1$ виконується $\forall x \in [0;0{,}5]$.

Далі виберемо за початкове наближення довільну точку відрізка [0;0,5], наприклад, його середину $x_0 = 0{,}25$ та обчислимо $f(x_0) = \frac{1-0{,}25^2}{2} = 0{,}46875$. Нарешті, знайдемо потрібну кількість ітерацій

$$\frac{q^n}{1-q}\left|f(x_0) - x_0\right| < 0{,}01,$$

$$\frac{0{,}5^n}{1-0{,}5}\left|0{,}46875 - 0{,}25\right| < 0{,}01,$$

$$2^n > 43{,}75, \text{ звідки } n \geqslant 6.$$

Отже, для забезпечення заданої точності потрібно отримати шосте наближення за формулою $x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1-x_n^2}{2}$, $n = 0,1,\ldots,6$. Результати обчислень подано в таблиці:

n	x_n
0	0,25
1	0,468750
2	0,390137
3	0,423897
4	0,410156
5	0,415886
6	0,413519

Таким чином, з точністю до 0,01 $x^* \approx x_6 \approx 0{,}41$ ($x^* = \sqrt{2} - 1$). Як бачимо, наближення навіть з невеликими номерами мало віддалені від x^*, бо геометрична прогресія зі знаменником, за модулем меншим 1, швидко прямує до 0. Зауважимо також, що для побудови послідовності x_0, x_1, ..., x_n, ... було використано довільну точку x_0. Це означає, що орбіти усіх точок приводять до нерухомої точки. Але для точності наближень вибір початкової точки x_0 є важливим: з формули випливає, що від вибору точки x_0 залежить швидкість збіжності до нуля правої частини. Швидкість збіжності ітераційної послідовності до точного розв'язання залежить не тільки від вдалого вибору точки x_0, а й від способу подання рівняння $F(x) = 0$ у вигляді $x = f(x)$.

Запропонуємо ще один спосіб. Він ґрунтується на еквівалентності рівнянь $F(x) = 0$ і $c \cdot F(x) = 0$ ($c \neq 0$ — стала). Отже, подамо дане рівняння у вигляді $x = x + c(x^2 + 2x - 1)$. Покладемо $c = -0{,}3$. Тоді $f(x) = -0{,}3x^2 + 0{,}4x + 0{,}3$ є перетворенням стиску на відрізку [0;0,5], бо $f'(x) = -0{,}6x + 0{,}4$ і $|f'(x)| \leqslant 0{,}4 = q_1$, $\forall x \in [0;0{,}5]$.

При $x_0 = 0{,}25$ обчислимо $f(x_0) = -0{,}3 \cdot 0{,}25^2 + 0{,}4 \cdot 0{,}25 + 0{,}3 = 0{,}38125$, а тому з нерівності

$$\frac{0{,}4^n}{1-0{,}4}\left|0{,}38125 - 0{,}25\right| < 0{,}01$$

отримаємо $n \geqslant 4$, тобто в даному випадку необхідно виконати меншу кількість ітерацій, бо $q_1 = 0{,}4 < 0{,}5 = q$. ♦

Таким чином, теорема 5 разом з методом послідовних наближень дозволяє в багатьох випадках гарантувати існування розв'язку й можливість його обчислення з потрібною точністю. Більш докладно з питаннями, що стосуються принципу відображень стиску, його узагальнення та застосування, можна ознайомитися в [6, 7].

Задачі для самостійного розв'язування

В задачах 1—3 розв'яжіть рівняння.

1. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots}}} = 2$.

2. $\sqrt{2 + x\sqrt{2 + x\sqrt{2 + \ldots}}}$.

3. $(x+1)^{(x+1)^{(x+1)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 3$.

4. Доведіть, що при $0 \leqslant a \leqslant 1$ ітерації $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n^2 - a\right)$, $x_0 = 0$ збігаються до $\sqrt{a}$.

5. Послідовність $\{x_n : n \geqslant 1\}$ будується за правилом: $x_0 = a > 0$, $x_n = \frac{1}{3}\left(2x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^2}\right)$. Доведіть, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{a}$.

6. Дослідіть на збіжність послідовність $\sqrt{3}$, $\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$, $\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}}$, ...

7. Нехай $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \geqslant 1$. Доведіть, що ці послідовності є монотонними і збігаються до однієї і тієї ж границі (ця границя і називається числом e).

8. Доведіть збіжність і знайдіть границю послідовності 1, $\frac{1}{1+1}$, $\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}$, ... (подібні дроби називаються ланцюговими; існує аналогія між ланцюговими дробами і десятковими наближеннями числа).

9. Розв'яжіть рівняння $\frac{\sqrt[4]{2-x}}{\sqrt{2\sqrt{2-x} - 1}} = x$.

10. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} = y, \\ \sqrt{y+5} = z, \\ \sqrt{z+5} = x. \end{cases}$$

11. Доведіть, що члени послідовності (8) з непарними номерами зростають, а з парними

номерами спадають і є збіжними, тобто $\lim_{n\to\infty}\alpha_{2n-1}=s_1$, $\lim_{n\to\infty}\alpha_{2n}=s_2$. Чи є числа s_1 і s_2 коренями рівняння $a^{a^x}=x$?

12. Скільки розв'язків має рівняння $a^{a^x}=x$ в залежності від параметра a, де $0<a<1$?

Вказівка. Дане рівняння є рівносильним рівнянню $x=\frac{1}{\ln a}\ln\frac{\ln x}{\ln a}$. Побудуйте графік функції $\varphi(x)=\frac{1}{\ln a}\ln\frac{\ln x}{\ln a}-x$ і з'ясуйте, скільки існує точок перетину графіка функції $y=\varphi(x)$ з віссю абсцис.

13. Скільки розв'язків має рівняння $x^3-3x^2+a=0$ в залежності від параметра a?

14. Доведіть, що рівняння $x^5+x+1=0$ має єдиний дійсний корінь, обчисліть його значення з точністю до 0,01.

15. Знайдіть розв'язання рівняння $x^3-3x+1=0$ методом послідовних наближень з точністю до 0,01.

Література

1. *Дороговцев А. Я.* Избранные задачи по математическому анализу. — К.: Вища шк., 1982. — 104 с.
2. *Егоров А.* Уравнения и пределы // Квант. — 1977. — № 10. — С. 34–39.
3. *Rippon R. J.* Infinite exponentials // The mathematical gazette. — 1983. — № 67. — P. 189–196.
4. *Кукуш А. Г.* Монотонные последовательности и функции. — К.: Вища шк., 1989. — 104 с.
5. Заочные математические олимпиады / Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер, Ж. М. Раббот, А. Л. — М.: Наука, 1981. — 128 с.
6. *Дороговцев А. Я.* Принцип відображень стиску // У світі математики. — 1974. — Вип. 5. — С. 70–87.
7. *Дороговцев А. Я.* Математичний аналіз: Підручник: У 2 ч. Ч. 2. — К.: Либідь, 1994. — 304 с.

А. І. ВОРОБЙОВА,
канд. фіз.-мат. наук, доцент, Чорноморський державний університет ім. Петра Могили,

В. М. ЛЕЙФУРА,
канд. фіз.-мат. наук, професор, заслужений вчитель України, Чорноморський державний університет ім. Петра Могили.

УДК [371.26:51]: 376.54

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЯ ТВОРЧИХ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ФІЗИКИ

В статті пропонується технологія моделювання та організації творчих лабораторних робіт. Розглядаються теоретичні аспекти проектування творчої пізнавальної діяльності в процесі навчання фізики.

Technology of design and organization of creative laboratory works is offered in the article. The theoretical aspects of planning of creative cognitive activity are examined in the process of studies of physics.

Формування творчої особистості, яка володіє креативним мисленням, здатна ставити і вирішувати пізнавальні проблеми, володіє культурою пізнавальної діяльності, є одним з основних пріоритетів в організації навчально-виховного процесу в сучасній школі. В Національній доктрині розвитку освіти України у XXI столітті зазначено, що держава повинна забезпечити формування у дітей та молоді сучасного світогляду, розвиток творчих здібностей і навичок самостійного наукового пізнання, самоосвіти і самореалізації особистості.

Свідченням актуальності проблеми реалізації творчої функції навчального експерименту в контексті пізнавальної діяльності учнів є існуюча практика навчання, а також новітні дослідження з теорії й методики навчання фізики [1, 8].

Важливим у розглядуваному контексті є формування методологічних знань, ознайомлення учнів з науковими методами пізнання, що, власне, й відображено в Державному стандарті базової і повної середньої освіти [7]. Особливе місце належить експериментальному методу. Фізичний експеримент є емпіричною базою фізичної науки і критерієм істинності теоретичних знань. З огляду на це, навчальний фізичний експеримент має бути не лише засобом формування певних практичних умінь і навичок, але й засобом засвоєння досвіду пізнавальної діяльності й розвитку творчих здібностей.

Окремим питанням є організація лабораторних робіт. Практика свідчить, що діяльність учнів під час виконання лабораторних робіт, як правило, носить репродуктивний характер. Учням пропонуються готові інструкції, а то й зошити для лабораторних робіт з чітко визначеною послідовністю дій, що мають виконуватися. З одного боку, це сприяє формуванню експериментальних умінь практичного характеру, наприклад, виконувати вимірювання, збирати експериментальну установку, спостерігати фізичне явище та ін. З іншого боку, відсутній творчий компонент — дії, що виконуються, здебільшого є репродуктивними.

Постає питання: як зробити лабораторну роботу творчою? Відповідь на це питання відображена в гіпотезі нашого дослідження: лабораторна робота набуде творчого характеру, якщо вона буде виконуватися у контексті вирішення пізнавальної проблеми, моделлю якої є творча експериментальна фізична задача.

Теоретичний аналіз проблеми засвідчує, що методологічною основою її вирішення є діяльнісна теорія навчання [4]. При цьому реалізація діяльнісного підходу має здійснюватися не з позицій простого побутового рівня, на зразок: учень виконує якісь практичні чи розумові дії, отже — це і є діяльнісний підхід. На нашу думку [4, 5, 6], реалізовувати діяльнісний підхід треба виходячи з основних психолого-педагогічних засад, що лежать в основі діяльнісного підходу як основного методологічного принципу дидактики [2, 9, 10]. Маються на увазі наступні концепти:

— навчальний процес — це взаємодія двох діяльностей: навчальної, суб'єктом якої є учень, і навчаючої, суб'єктом якої є вчитель;

— вчитель організовує, проектує і керує навчальною діяльністю учня;

— учень є одночасно суб'єктом і об'єктом навчальної діяльності;

— навчальна діяльність має задачний характер, тобто є процесом розв'язування навчальних задач;

— продукти навчальної діяльності — це ті психологічні новоутворення, які виникають в учня в результаті її здійснення, а отже, вони не можуть бути відчужені від суб'єкта цієї діяльності;

— навчальна діяльність є багатогранним, але цілісним системним утворенням, що має власну структуру і допускає різні способи декомпозиції.

Вищеназвані концепти — це ще не всі особливості навчальної діяльності. Але в даному контексті для нас актуальним є її процесуальний аспект. Як відомо, процес будь-якої діяльності, в тому числі й навчальної, має такі складові: орієнтувальна частина, виконавська, контрольно-коректуюча [2, 10].

Суть орієнтувальної частини полягає в тому, що перед тим, як здійснювати практичну діяльність, суб'єкту необхідно зорієнтуватися в ситуації, тобто сформувати орієнтувальну основу. Адже діяльність виконується суб'єктом за певних умов відносно нього як зовнішніх, так і внутрішніх впливів. Орієнтувальну основу діяльності формує сам суб'єкт. Відповідно, в умовах навчальної діяльності орієнтувальну основу діяльності формує учень, як правило під впливом вчителя. Орієнтувальна основа діяльності має дві складові: «загальну» і зорієнтовану на «виконання» [2, 10]. Перша — забезпечує аналіз і оцінку ситуації, вибір адекватних засобів, друга — спрямована на розробку плану здійснення діяльності.

Таким чином, орієнтувальний етап складає теоретичну частину діяльності, а інші два етапи — її практичну частину.

Розглянемо в цьому контексті процес розв'язання експериментальної задачі. Як відомо, розв'язання експериментальних фізичних задач — це одна з активних форм організації навчальної роботи. Розв'язуючи експериментальні задачі на основі використання лабораторного обладнання, учні самостійно спостерігають за протіканням фізичного явища, самостійно експериментують, а тому процес навчального пізнання набуває для них пошуково-дослідного характеру.

Розв'язання експериментальної задачі містить чотири важливих етапи [13].

Зупинимося на зазначених етапах детальніше.

1. З'ясування та усвідомлення умови задачі.
2. Складання плану експериментування для розв'язку відібраної задачі.
3. Здійснення наміченого плану.
4. Експериментальна перевірка відповіді.

На останньому етапі перевіряють правдоподібність відповіді, аналізують отримані результати, здійснюють пошуки інших способів розв'язання даної задачі.

Як бачимо, тут представлено всі процесуальні частини діяльності: орієнтувальна частина (1 і 2 етапи), виконавська (3-й етап), контрольно-коректуюча (4-й етап).

Це дало нам підстави розробити механізм проектування творчої навчально-пізнавальної діяльності в процесі виконання лабораторних робіт, заснований на розв'язанні експериментальних задач [3]. Як уже зазначалося, лабораторну роботу ми моделюємо як процес розв'язування творчої експериментальної задачі. Ключовим творчим моментом такої навчальної діяльності є необхідність пошуку самого алгоритму, тобто послідовності дій, а також відповідних засобів організації й проведення фізичного досліду. Таку сукупність експериментальних засобів і дій ми називаємо моделлю фізичного експерименту. Моделювання експерименту і його реалізація є основними етапами творчої лабораторної роботи в структурі розв'язання експериментальної задачі.

Нагадаємо, що експериментальна задача — це задача, процедура розв'язання якої передбачає виконання фізичного експерименту (досліду). Творчою експериментальна задача вважається за умови, якщо учню невідома процедура (спосіб) її розв'язання, невідома система засобів, не вказано повністю або частково необхідне обладнання.

Як вже наголошувалося, ключовим етапом процесу розв'язання творчої експериментальної задачі є розробка моделі експерименту. Він включає в себе теоретичний аспект розв'язання задачі. Реалізація ж моделі, тобто виконання самого експерименту — це вже практичний етап. Цей етап, власне, й реалізується як лабораторна робота. Хоча підготовка до такої лабораторної роботи є творчим і цікавим процесом, який вимагає пошуку ідеї, яка часто ґрунтується на здогадці, глибокому теоретичному аналізі.

Педагогічне моделювання лабораторної роботи на основі творчої експериментальної задачі включає такі етапи:

1. Визначення теми і мети лабораторної роботи.

2. Моделювання суб'єкта, якому буде запропоновано експериментальну задачу. Мається на увазі, що творча задача є категорією суб'єктивною, тому вчитель повинен орієнтуватися на модель суб'єкта, який буде розв'язувати задачу.

3. Вибір проблемно-змістового забезпечення у вигляді експериментальної задачі.

4. Розробка теоретичної моделі її розв'язання.

5. Моделювання навчального експерименту на основі теоретичної моделі. Визначення процедури — основних етапів, послідовності дій щодо моделювання експерименту та його практичної реалізації.

6. Розробка навчальної допомоги у вигляді допоміжних теоретичних запитань і задач, інших евристичних засобів (приписів-орієнтирів, узагальнених планів дій).

Розглянемо приклади експериментальних задач, які використовувалися нами в ході моделювання творчих лабораторних робіт.

Задача 1. Використовуючи вимірювальну лінійку, визначити тиск цеглини на горизонтальну поверхню стола для кожного з трьох положень. (Густина цеглини 1,5 г/см^3)

Задача 2. На столі лежить скляна пластинка прямокутної форми, на ній — шматок свинцю. Є мензурка і вимірювальна лінійка. Визначити середній тиск скляної пластинки на поверхню стола. (Густина скла — 2,6 г/см^3)

Задача 3. Користуючись вимірювальною лінійкою, визначити, на скільки зміниться тиск води на дно склянки, якщо у воду повністю занурити чавунну гирю масою 500 г. Відповідь перевірити дослідом.

Учні можуть самі розробити модель цього експерименту. Кожний етап вимагає від учня виконання певної сукупності дій, які можна розділити на репродуктивні, пошукові і творчі. Кількість таких дій характеризує рівень складності окремого етапу і лабораторної роботи в цілому. Рівень проблемності визначається ступенем невідповідності знань, умінь і особистих якостей учня тим, які необхідні для виконання даного етапу. В якості орієнтувальної основи учням пропонується припис-орієнтир.

Розробка моделі експерименту

1. Визначте, які прилади і матеріали необхідні для експериментального вимірювання фізичних величин.

2. Уявіть всі можливі варіанти проведення експерименту.

3. Виберіть з усіх можливих варіантів той, який є технічно найпростішим і дозволяє забезпечити найвищу точність результатів.

4. Складіть план виконання експерименту.

План повинен відображати основні етапи проведення експерименту і бути достатньо гнучким, тобто допускати, при необхідності, можливість змінювати послідовність дій в ході експерименту. План експерименту повинен містити вказівки: які вимірювання, обчислення будуть проводитися в ході експерименту і за якими формулами.

5. Вкажіть, які схеми, графіки, таблиці, малюнки потрібно буде виконати в процесі експерименту.

Нижче пропонуємо моделі лабораторних робіт.

Лабораторна робота № 1

1. Формулювання проблеми у вигляді експериментальної задачі.

Визначте силу тяжіння, що діє на тіло невідомої маси, маючи лінійку, пружину, тягарці масою 100 г.

2. Розробка моделі експерименту.

Виготовлення будь-якого вимірювального приладу завжди пов'язане з градуюванням його шкали. Це означає, що на шкалі мають бути нанесені поділки, які показують межі вимірювання, та проміжні поділки, які потрібні для вимірювання величин, значення яких менше за верхню межу вимірювання. Динамометр призначений для вимірювання сили. Тому для градуювання його шкали треба виміряти значення сили, які заздалегідь відомі. При цьому зручно скористатися відомим фактом, що на тіло масою 102 г діє сила тяжіння, яка дорівнює 1Н. Підвішуючи до пружини один, два, три і т. д. важки такої маси, можна позначити на шкалі положення стрілки, приєднаної до пружини, які відповідають її розтягуванню під дією сил 1Н, 2Н, 3Н і т. д. Дрібніші поділки можна дістати, поділяючи відстань між одержаними поділками на менші частини. Для спрощення роботи скористаємося важками масою по 100 г з набору. Нестача 2 г, що дає похибку близько 2%, мало вплине на результати.

3. План виконання експерименту.

1. Закріпити папір у вертикальному положенні.

2. Горизонтальною рискою позначити на папері початкове положення стрілки і поставити цифру 0.

3. Підвісити до гачка на пружині важок масою 100 г.

4. Позначити положення стрілки і поставити цифру 1.

5. Повторити п. 3, 4 для двох, трьох і чотирьох таких самих важків.

6. Виміряти відстань між сусідніми поділками. Висновок записати у зошит.

7. Відстані між поділками поділити на 10 рівних між собою частин, позначивши їх короткими рисками.

8. До гачка на пружині підвісити тіло невідомої маси і виміряти силу тяжіння, яка діє на нього.

9. Результати вимірювань записати у зошит.

Лабораторна робота № 2

Тема. Визначення коефіцієнта тертя.

1. Формулювання проблеми у вигляді експериментальної задачі.

Дано: дві дерев'яні лінійки, ізоляційна стрічка. Визначити коефіцієнт тертя кінця лінійки по поверхні столу. (Задачу сформульовано на основі ситуації, розглянутої в [11]).

2. Теоретична модель розв'язання задачі.

Припустимо, що лінійки розміщені так, як показано на рис. 1.

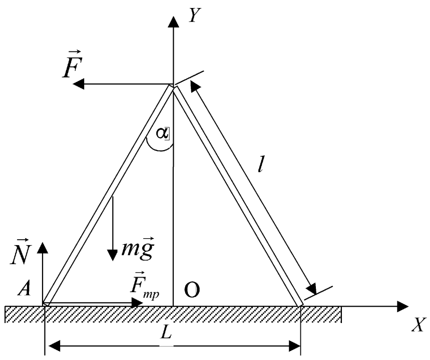


Рис. 1

Існує таке значення кута α, при якому кінці лінійок починають розходитись, ковзаючи по поверхні столу. Для цього моменту можна записати рівняння динаміки.

В проекціях на вісь X:

$$F_{тр} - F = 0,$$

врахувавши, що $F_{тр} = \mu N$, запишемо:

$$\mu N - F = 0. \quad (1)$$

В проекціях на вісь Y:

$$N - mg = 0. \quad (2)$$

Правило обертових моментів сил відносно т. A запишеться так:

$$Fl\cos\alpha - 0{,}5mg\sin\alpha = 0, \quad (3)$$

де F — сила взаємодії лінійок;
N — сила реакції поверхні столу;
m — маса лінійки,
l — її довжина;
g — прискорення вільного падіння;
$F_{тр}$ — сила тертя;
α — кут між лінійкою і вертикаллю (див. рис. 2).

Розв'язавши систему рівнянь (1), (2), (3), знайдемо формулу для коефіцієнта тертя:

$$\mu = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha = \frac{L}{2\sqrt{4l^2 - L^2}}, \quad (4)$$

де L — відстань між кінцями лінійок в момент початку їх ковзання по поверхні столу.

Навчальна допомога

Допоміжні запитання.

Чому драбина, яка спирається на вертикальну стіну (рис. 2), не ковзає по горизонтальній поверхні?

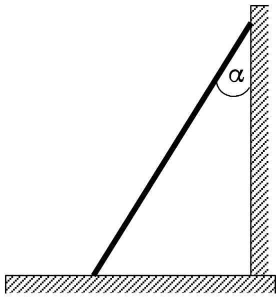


Рис. 2

Які сили діють на драбину?

За якої умови вона буде ковзати?

Допоміжна теоретична задача.

Драбина спирається на гладеньку стіну так, як показано на рис. 2. Коефіцієнт тертя між драбиною і горизонтальною поверхнею μ. Визначити, під яким максимальним кутом α можна розмістити драбину.

3. Модель виконання експерименту

План виконання досліду

1. Кінці лінійок скріпити ізоляційною стрічкою.
2. Поставити скріплені лінійки на поверхню столу так, як зображено на рис. 2.
3. Повільно розсуваючи кінці лінійок, зафіксувати на поверхні столу їх положення у момент, коли вони самостійно почнуть рухатися.
4. Лінійкою виміряти відстань L.
5. Обчислити значення коефіцієнта тертя за формулою (4).
6. Проаналізувати отриманий результат, оцінити його точність.

Підсумовуючи викладене, зазначимо: результати проведеного нами дослідження [6] засвідчили, що запропонована вище технологія організації лабораторних робіт дозволяє значно активізувати пізнавальну діяльність учнів, підвищити інтерес до пошукової діяльності, сприяє кращому засвоєнню предметних знань, а також розвитку пізнавальної діяльності. Розвиток пізнавальної діяльності ми розуміємо як її динаміку від репродуктивних форм до творчих (дослідницьких), домінування творчих пошукових дій над репродуктивними.

Література

1. *Андрєєв А. А.* Розвиток уміння формулювати і розв'язувати експериментальні задачі у процесі винахідницької діяльності старшокласників: Автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / НПУ імені М. П. Драгоманова. — К., 2007. — 20 с.

2. *Атанов Г. А.* Возрождение дидактики — залог развития высшей школы. — Донецк: Изд-во ДОУ, 2003. — 180 с.

3. *Галатюк М., Мислінчук В.* Моделювання творчих лабораторних робіт на основі експериментальних задач // Фізика. Нові Технології навчання: Зб. наук. пр. студентів і молодих науковців / КДПУ ім. В. Винниченка. — Кіровоград, 2008. — Вип. 6. — С. 104—108.

4. *Галатюк М. Ю.* Розвиток пізнавальної діяльності учнів в процесі виконання лабораторних робіт // Теорія та методика вивчення природничо-математичних і технічних дисциплін: Зб. наук.-метод. пр. / Рівнен. держ. гуманітар. ун-т. — Рівне, 2008. — Вип. 11. — С. 42—46.

5. *Галатюк М. Ю., Галатюк Ю. М.* Реалізація діяльнісної теорії навчання в організації лабораторних робіт з фізики // Пошук молодих: Зб. матеріалів Всеукр. студент. наук.-практ. конф. «Компетентнісний підхід до вивчення природничо-математичних дисциплін в основній і старшій школі» / Уклад. В. Д. Шарко. — Херсон, 2009. — Вип. 8. — С. 19—21.

6. *Галатюк Ю. М.* Розвиток пізнавальної діяльності в процесі виконання лабораторних робіт з фізики: Магістерська робота. — Рівне: РДГУ, 2009. — 167 с.

7. Державний стандарт базової і повної середньої освіти // Освіта України. — 2004. — № 5. — С. 1—13.

8. *Котельніков Г. О.* Лабораторні роботи з фізики дослідницького характеру у класах з поглибленим вивченням фізики: Дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02. — Запоріжжя, 1997. — 213 с.

9. *Леонтьев А. Н.* Деятельность. Сознание. Личность. — М.: Педагогика, 1975. — 304 с.

10. *Машбиц Е. И.* Психологические основы управления учебной деятельностью. — К.: Вища шк., 1987. — 223 с.

11. *Морин Д. В.* Определение коэффициента трения // Учебная физика. — 2002. — № 5. — С. 21.

12. Національна доктрина розвитку освіти України у XXI столітті // Освіта України. — 2002. — № 33. — С. 4—6.

13. *Павленко А. І., Сергєєв О. В., Тищук В. І.* Експериментальні навчальні задачі: проблеми теорії і практики // Теорія та методика вивчення природничо-математичних і технічних дисциплін: Зб. наук.-метод. пр. / Рівнен. держ. гуманітар. ун-т. — Рівне, 1999. — Вип. 1, № 1. — С. 54—58.

Ю. М. ГАЛАТЮК,
канд. пед. наук, професор кафедри методики викладання фізики та хімії Рівненського державного гуманітарного університету,

М. Ю. ГАЛАТЮК,
вчитель фізики, магістр Рівненського природничо-математичного ліцею «Елітар»,

В. І. ТИЩУК,
канд. пед. наук, професор, завідувач кафедри методики викладання фізики та хімії Рівненського державного гуманітарного університету.

УДК 372.851:511.17

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНІ ЗМАГАННЯ З МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ ДЛЯ УЧНІВ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ

Розглянуто питання щодо організації та проведення інтелектуальних змагань з математики і фізики для учнів 5—8-х класів «Наукові старти».

In the report questions of teamwork of middle and higher educational institutions on the organisation of a physics and mathematical holiday for pupils of 5—8 classes «Scientific starts» are considered. Methodological and organizational aspects of this work are considered.

Проблемами в галузі фізико-математичної освіти, які стимулюють зацікавленість вищих навчальних закладів у роботі зі школярами до початку профільного навчання, є: зниження рівня підготовки абітурієнтів, що унеможливлює якісне навчання у вищих навчальних закладах (у першу чергу — з фундаментальних наук), катастрофічне зменшення кількості випускників, орієнтованих на здобуття якісної фізико-математичної освіти.

Заходи щодо покращання ситуації на регіональному рівні: стратегія роботи з дітьми, запроваджена в Харківському національному університеті ім. В. Н. Каразіна; робота Центру довузівської освіти Малого Каразінського університету; співпраця університету з кращими середніми навчальними закладами.

Організаційні засади проведення фізико-математичного свята «Наукові старти»: незмінний щорічний термін проведення, відмова від використання «адміністративного ресурсу» для залучення учасників, безкоштовність для учасників, поєднання конкурсних, пізнавальних та розважальних моментів, принципи розповсюдження інформації про свято серед учнів середніх навчальних закладів; розклад проведення свята на другий та третій тиждень вересня.

Організація свята та перевірка робіт учасників, нагородження. Залучення кращих студентів та старших ліцеїстів до проведення свята і перевірки робіт учасників. Аналіз задач олімпіад, популярні лекції, «Парадокс-шоу» на базі фізичних експериментів.

Свято проводиться для учнів 5—8-х класів. Всім учасникам пропонуються завдання з математики, а учням 7—8-х класів — ще й завдання з фізики. Учні 7—8-х класів мають можливість вибирати один предмет або виконувати завдання з обох предметів. Підсумки олімпіад з фізики та математики підбиваються окремо.

Підбір завдань для олімпіад з фізики та математики (визначення оптимальних варіантів за складністю та тематикою): перш за все завдання мають бути цікавими для учасників. Неприпустимі будь-які занадто жорсткі вимоги до оформлення робіт учасників. Усе це випливає із загального положення: свято має «вивести» вчителів і працівників ВНЗ не на підготовлених та навчених дітей, а на обдарованих. Вони можуть навчатися далеко в ненайкращих школах і тому поступатися за рівнем знань іншим учням. Якщо вчасно почати проводити з такими дітьми цілеспрямовану додаткову роботу, вони швидко наздоженуть «конкурентів» і зможуть досягти значних успіхів. Таких прикладів досить багато.

Особливо складним є підбір завдань для олімпіади з фізики для учнів 7-го класу. Ці учні тільки починають вивчати фізику — вони встигли відвідати 1—2 уроки з даного предмета. Тому задачі для олімпіади орієнтовано головним чином на знання, набуті з курсу природознавства і з особистого життєвого досвіду (діти зараз живуть в оточенні багатьох досягнень сучасної техніки). Крім того, пропонуються задачі на рівномірний рух, які частково знайомі дітям з курсу математики.

«Наукові старти» проводяться з 2003 року. Перші їх учасники вже встигли стати студентами. Слід зазначити, що багато хто з них кілька років навчався в Малому Каразінському університеті, а потім обрав механіко-математичний факультет або факультети фізичного профілю. За відгуками викладачів, саме ці студенти найбільш серйозно ставляться до навчання, беруть участь у наукових дослідженнях і досягають найкращих результатів, які можна вважати позитивними.

І. М. ГЕЛЬФГАТ,
канд. фіз.-мат. наук, учитель фізики Харківського фізико-математичного ліцею № 27,

С. О. ЛІФИЦЬ,
заслужений вчитель України, учитель математики Харківського фізико-математичного ліцею № 27.

УДК 373.5.016:514.116 (043.3)

МЕТОДИКА ДИФЕРЕНЦІЙОВАНОГО ВИВЧЕННЯ ТЕОРЕТИЧНОГО МАТЕРІАЛУ З ТРИГОНОМЕТРІЇ УЧНЯМИ ПРОФІЛЬНИХ КЛАСІВ

Статтю присвячено проблемам методики вивчення теоретичного матеріалу з тригонометрії в умовах диференційованого навчання математики. Запропоновано логічні та образні прийоми запам'ятовування тригонометричних формул, три підходи до вивчення тригонометричних функцій. Розглянуто найбільш ефективні форми організації вивчення теоретичного матеріалу в профільній школі.

The article is devoted to the methods of study theoretical material from trigonometry under conditions of differential study mathematics. Logical and manner methods of memorizing trigonometry formulas, three approaches to trigonometry functions are offered. The most effective forms of organizing study theoretical material at profile school are considered.

Тригонометричний матеріал — важливий засіб спонукання до загальноосвітньої та профільної підготовки учнів сучасної школи. Знання тригонометрії необхідні для розв'язання широкого кола математичних, технічних і практичних завдань. Значущим є внесок тригонометричних знань у розвиток особистості, розширення її світогляду, розвиток логічного і алгоритмічного типу мислення, що особливо важливо в навчанні учнів-гуманітаріїв. Формування навичок застосування математики є однією з головних цілей вивчення тригонометричного матеріалу в класах природничих, технічних профілів. Для учнів математичних профілів засвоєння тригонометричних знань необхідне для навчання у вузі, для опанування майбутньою професійною діяльністю, що тісно пов'язана з математикою. Таким чином, вивчення тригонометричного матеріалу є актуальним в умовах сучасної профільної математичної освіти.

Результати наших педагогічних спостережень, науково-методичні публікації в педагогічній пресі, бесіди з вчителями і учнями свідчать про низький рівень знань з тригонометрії у переважної більшості старшокласників. Учні формально засвоюють навчальний матеріал з тригонометрії, не розуміють суті основних понять тригонометричного матеріалу, не вміють їх застосовувати в нових умовах. Таким чином виникає проблема — низький рівень знань з тригонометрії і необхідність їх підвищення в сучасних умовах профільної та рівневої диференціації навчання математики в школі. На наш погляд, однією з причин зазначеної проблеми є неналежне засвоєння учнями теоретичного матеріалу з навчальних тем, а саме: означень понять, тверджень, фактів, правил. Засвоєння теоретичного матеріалу створює підґрунтя для всього подальшого вивчення теми, зокрема, для формування навичок та вмінь його застосування в стандартних ситуаціях, в змінених або нових умовах, при розв'язуванні проблемних, творчих завдань, задач практичного змісту.

Різним аспектам вивчення теоретичного матеріалу з тригонометрії в середній школі присвячено наукові праці І. В. Баума, М. М. Бескіна, В. М. Брадіса, В. В. Котек, С. Є. Ляпіна, С. І. Новосьолова, В. В. Пікан, В. В. Рєп'єва, М. А. Рибкіна, В. Г. Чичигіна та інших вчених. Ці дослідження складають основу методики навчання тригонометричного матеріалу, проте слід зауважити, що вони стосуються середньої загальноосвітньої безпрофільної школи. На часі ж стоїть питання навчання математики, в тому числі тригонометричного матеріалу, відповідно до навчально-пізнавальних можливостей учнів, їх профільних інтересів та професійних намірів.

Розв'язанню зазначеної проблеми значну увагу приділяють сучасні науковці, математики-методисти О. Г. Гайштут, А. С. Істер, І. М. Конет, А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, З. І. Слєпкань, Р. П. Ушаков, Л. Г. Чашечникова, О. С. Чашечникова, М. С. Якір та інші.

С. А. Владимирцева [1] вважає, що причиною незадовільних знань учнів з тригонометрії є наявність двох наочних моделей, за допомогою яких вивчається тригонометричний матеріал в школі, а саме: одиничне коло і графіки тригонометричних функцій. Вона пропонує усунути цю «двоїстість» і більше уваги приділяти роботі з одиничним колом.

На думку А. Г. Мордковича [4], необхідно переглянути тригонометричні методичні традиції, які складались в школі протягом десятиліть. При цьому він пропонує: 1) головну увагу на початку вивчення тригонометрії приділити моделі «числове коло»; 2) тригонометричні формули розглядати після вивчення найпростіших тригонометричних рівнянь.

У працях Л. Г. Чашечникової, О. С. Чашечникової [7] тригонометричний матеріал розглядається як потужний засіб формування і розвитку творчого мислення учнів. В статті Т. Овчинникової [5] обґрунтовується доцільність застосування життєвого досвіду учнів в процесі вивчення тригонометричних функцій. А. Грохольська [2] доводить ефективність паралельного вивчення тригонометричних рівнянь і нерівностей.

Таким чином, методичні проблеми навчання тригонометричного матеріалу активно обговорюються в педагогічній пресі, проте науково-методичних публікацій, що стосуються вивчення теоретичного матеріалу з тригонометрії в умовах диференційованого навчання, обмаль. Мета статті — запропонувати методичні підходи до вивчення теоретичного матеріалу з тригонометрії в умовах профільної та рівневої диференціації навчання математики.

Значну частину тригонометричного матеріалу, який вивчається в старшій школі, складають тригонометричні формули. В процесі їх вивчення можна виділити два етапи: 1) виведення тригонометричних формул; 2) їх застосування до перетворень тригонометричних виразів, доведення тотожностей тощо. Найбільшу увагу до першого етапу слід приділити в класі математичного профілю, зважаючи на те, що він в значній мірі відображає теоретичну складову змісту тригонометричного матеріалу [3]. В усіх профільних класах має переважати другий етап, оскільки учні в першу чергу мають навчитися застосовувати тригонометричні формули на практиці.

Пропонуємо розглянути логічні та образні прийоми запам'ятовування тригонометричних формул. Логічні прийоми ґрунтуються на здатності учня логічно думати, здійснювати аналіз, порівняння, узагальнення та інші розумові операції. Образні прийоми більшою мірою передбачають звернення до візуальної та слухової культури учня. Як свідчать результати педагогічного експерименту, особливо ефективне застосування образних прийомів в навчанні учнів-гуманітаріїв, в той час як учням математичних профілів більш імпонують логічні прийоми.

До логічних прийомів запам'ятовування тригонометричних формул віднесемо такі:

1) прийом виведення формули. Для здібних до математики старшокласників — це один з кращих прийомів запам'ятовування тригонометричних формул. Наприклад, для запам'ятовування і засвоєння тригонометричних формул подвійного аргументу важливо утворити в свідомості учня міцний зв'язок у вигляді ланцюжка допоміжних фактів:

— група формул подвійного аргументу виводиться з формул додавання;

— у відповідній формулі додавання розглянемо випадок, коли її аргументи рівні $\alpha = \beta$;

- замінимо у формулі додавання аргумент β на аргумент α;

— виконавши математичні спрощення виразів, отримаємо відповідну формулу подвійного аргументу;

2) акцентування уваги на незалежності основних тригонометричних формул. Серед співвідношень між тригонометричними функціями одного аргументу три з них незалежні: основна тригонометрична тотожність та аналітичні означення тангенса і котангенса. Алгебраїчними перетвореннями з цих формул можна отримати ряд інших, наприклад, співвідношення між тангенсом і котангенсом, тангенсом і косинусом, котангенсом і синусом. Цей факт має першочергове значення з точки зору запам'ятовування формул, їх застосувань та доведень;

3) «правило ряду». Для запам'ятовування співвідношень між тригонометричними функціями корисне «правило ряду»: в ряді тригонометричних функцій синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс і косеканс, добутки функцій, рівновіддалених від кінців цього ряду, дорівнюють одиниці;

4) твердження про взаємно обернені тригонометричні функції: пари тригонометричних функцій тангенс і котангенс, синус і косеканс, косинус і секанс взаємно обернені, наприклад:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha};$$

5) зіставлення тригонометричної формули з невірними формулами. Вірна тригонометрична формула порівнюється з формулами, які мають зовнішню схожість, але внутрішні відмінності. При цьому створюється можливість для акцентування уваги на окремих елементах виучуваної формули. Наприклад:

Тригонометрична формула	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
Формули для порівняння	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ $\sin\alpha+\sin\beta=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha+\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

6) виявлення та виправлення помилок у тригонометричній формулі. Наприклад, відшукати помилки у формулах: $\cos 2\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$. Виконання цієї вправи слід завершити самоперевіркою за допомогою таблиці тригонометричних формул;

7) дописування тригонометричної формули. Наприклад, завершити формулу $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+$ ________;

8) ідентифікація тригонометричної формули. Наприклад, назвати тригонометричну формулу $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ і визначити її належність до однієї з груп формул.

Образні прийоми запам'ятовування тригонометричних формул:

1) прийом «озвучування» тригонометричної формули. В процесі вивчення тригонометричних формул корисно відтворювати їх словесні формулювання. Слід зауважити, що це доцільно робити в процесі виконання вправ, що сприяє мимовільному запам'ятовуванню;

2) прийом завершення сполуки «зміст-форма». Наприклад: «основна тригонометрична тотожність — це $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$»;

3) прийом застосування мнемонічних правил (рис. 1). З допомогою мнемонічних правил відбувається процес візуального аналізу формул, запам'ятовування їх знаково-символічних оболонок [6].

Мнемонічні правила можуть сформулювати і самі учні. При цьому варто звернути їх увагу на чередування знаків у формулах та назв функцій і кофункцій у відповідних добутках.

Зупинимося детальніше на методиці вивчення властивостей тригонометричних функцій. Виділимо три підходи до їх вивчення в профільних класах:

1. ***Аналітичний***. Властивість функції формулюється і строго доводиться, виходячи з її означення і аналітичного завдання. Потім ця властивість демонструється на графіку функції.

2. ***Геометричний***. Властивість функції встановлюється і обґрунтовується на основі

Мнемонічне правило 1
Формули додавання для синуса і косинуса

cos	$(\alpha+\beta)$ $(\alpha-\beta)$	=	$\cos\alpha\ \cos\beta$	$-$ $+$	$\sin\alpha\ \sin\beta$
sin	$(\alpha+\beta)$ $(\alpha-\beta)$	=	$\sin\alpha\ \cos\beta$	$+$ $-$	$\cos\alpha\ \sin\beta$

Мнемонічне правило 2
Формули половинних аргументів

$\sin 2\Delta = 2\sin\Delta\cos\Delta$

$$\mathrm{tg}\,2\Delta=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\Delta}{1-\mathrm{tg}^2\Delta}$$

$\cos 2\Delta = \cos^2\Delta - \sin^2\Delta$

Рис. 1. Мнемонічні правила для запам'ятовування тригонометричних формул

наочно-інтуїтивних міркувань з допомогою аналізу її графіка.

3. ***Комбінований***. Спочатку на основі аналізу графіка функції формулюється її властивість, після чого ця властивість чітко обґрунтовується.

У класах математичних профілів виправданий аналітичний підхід, що відповідає абстрактно-дедуктивному викладенню теоретичного матеріалу. Геометричний підхід має переважати в класах гуманітарних, природничих профілів. Зауважимо, що строгі доведення деяких властивостей тригонометричних функцій (наприклад, парності косинуса, непарності синуса) необхідно пропонувати і в класах гуманітарних профілів. Тут це найкраще реалізувати комбінованим способом. Комбіноване вивчення більшості властивостей тригонометричних функцій доцільне в загальноосвітніх класах, а також в класах універсальних профілів.

Розглянемо приклад. Вивчення властивостей парності і непарності тригонометричних функцій в класі будь-якого профілю розпочинається з повторення означень парної і непарної функції, властивостей їх графіків. Особливу увагу учнів слід звернути на істинність як прямих, так і обернених тверджень, що стосуються графіків парних і непарних функцій. Наприклад: «Графік непарної функції симетричний відносно початку координат» (пряме твердження); «Якщо графік функції симетричний відносно початку координат, то функція непарна» (обернене твердження). Саме останнє твердження дає можливість висловити гіпотезу про непарність синуса на основі аналізу його графіка.

Встановлення і обґрунтування непарності функції синус здійснюємо за одним з трьох підходів.

1. Геометричний підхід.

Учням пропонується проаналізувати графік функції $y = \sin x$ і звернути увагу на його розміщення відносно точки O — початку системи координат. На основі твердження про симетричність відносно початку координат графіка функції робиться висновок про непарність синуса. При цьому вчитель повинен зауважити, що цей висновок отриманий лише на основі геометричних міркувань і потребує строгого доведення.

2. Аналітичний підхід.

Доведення здійснюється на основі означення непарної функції і геометричної інтерпретації функції синус. Перша суттєва ознака непарної функції виконується — область визначення синуса симетрична відносно нуля. Обґрунтування рівності $\sin(-x) = -\sin x$ для довільних дійсних значень x зводиться до симетричності точок одиничного кола, які відповідають числам x та $-x$. У цих точок абсциси рівні, а ординати — протилежні числа. Зауважимо, що факт симетричності точок, які відповідають числам x та $-x$ не очевидний і потребує доведення, яке можна здійснити, розглянувши, наприклад, відповідні трикутники.

3. Комбінований підхід.

Поєднуються два вищерозглянуті підходи: спочатку висловлюється гіпотеза про непарність синуса за допомогою графіка, а потім вона строго обґрунтовується.

Розглянемо особливості організації вивчення теоретичного матеріалу в класах різних профілів. Вибір форм і методів вивчення теоретичного матеріалу ми здійснювали залежно від його змісту, пізнавальних можливостей та здібностей учнів. Лише доцільні комбінації форм і методів здатні забезпечити високу ефективність процесу пізнання.

На нашу думку, головними вимогами до методів вивчення теоретичного матеріалу в класі математичного профілю є активізація мислення учнів, розвиток їх здібностей, самостійності у здобуванні знань, інтересу до вивчення тригонометричного матеріалу. Тут доцільне застосування таких методів вивчення теоретичного матеріалу, як шкільна лекція, самостійна робота учнів та проблемне навчання.

У класі математичного профілю ефективне вивчення теоретичного матеріалу великими блоками з використанням методу укрупнення дидактичних одиниць. Суть цього методу висвітлено в працях багатьох науковців і практиків, зокрема П. М. Ердніева, В. Ф. Шаталова, А. Г. Гайштута, Р. Т. Хазанкіна. Даний метод передбачає прискорений темп навчання, виклад матеріалу великими блоками, що сприяє цілісному його сприйняттю, формує в учнів уміння логічно мислити, встановлювати причинно-наслідкові зв'язки. При цьому учням забезпечується можливість засвоювати навчальний матеріал на різних рівнях. Звільняється час на поглиблене вивчення теоретичного матеріалу сильними учнями і на його деталізацію слабкими. Такий виклад теоретичного матеріалу ми здійснювали у формі шкільної лекції.

У математичному класі доцільне самостійне вивчення учнями окремих тем з використанням дидактичного матеріалу підручника, навчальних посібників, науково-популярної літератури. Самостійне вивчення теоретичного матеріалу сприяє активізації пізнавальної діяльності учнів, привчає їх самостійно виділяти головне в навчальному матеріалі, бачити нові поняття, коротко записувати доведення в символічній формі. При організації самостійного вивчення теоретичного матеріалу в математичному класі замість детального інструктажу, що характерний для гуманітарного класу, даються тільки загальні вказівки щодо мети, порядку і способів виконання пізнавального завдання, список необхідної літератури. Учням надається можливість самим визначати істотне і головне в новому матеріалі, які попередні знання необхідно використати.

Розглянемо приклад організації самостійного вивчення нового матеріалу в класі математичного профілю. Після вивчення функції синус доцільно організувати самостійне вивчення теми «Функція $y = \cos x$, її властивості і графік».

На уроці, що передує уроку вивчення нового матеріалу, всі учні отримують завдання самостійно опрацювати теоретичний матеріал за запропонованим планом.

1. Прочитати зміст пункту «Функція $y = \cos x$, її властивості і графік».

2. Вивчити властивості функції $y = \cos x$ з доведеннями, склавши в зошиті відповідну таблицю з діленнями: назва властивості, основний зміст властивості, теоретичне обґрунтування.

3. Намалювати в зошиті графік функції $y = \cos x$.

4. Усно сформулювати властивості кривої $y = \cos x$ (косинусоїди), виходячи з графіка і властивостей відповідної функції.

5. Виділити властивості, доведення, міркування, які залишились незрозумілими. З'ясувати їх зміст у відповідних посібниках, довідниках, вчителя, товариша.

Клас математичного профілю неоднорідний за своїм складом, тому самостійне вивчення нового матеріалу має відбуватись з урахуванням рівневої диференціації. Окремі більш підготовлені учні отримують додаткові завдання підготувати реферативні повідомлення історичного плану з певної теми, альтернативні доведення теорем і виведення формул. У даному прикладі «сильніші» учні отримують наступні додаткові завдання:

1. Довести властивість монотонного зростання і спадання функції на двох проміжках відповідно $[-\pi+2\pi n; 2\pi n]$, $n \in Z$ і $[2\pi n; \pi+2\pi n]$, $n \in Z$ двома способами: виходячи з означень зростаючої і спадної функції, і за допомогою формул зведення.

2. Довести неперервність функції $y = \cos x$ двома способами: виходячи з неперервності функції $y = \sin x$, і за означенням неперервної функції.

При самостійному вивченні теоретичного матеріалу більш здібним до математики учням доцільно надати можливість самим визначити план роботи і порядок дій, самотужки знайти необхідну навчальну літературу.

Учні з більш низьким рівнем підготовки отримують завдання підготувати наочні посібники для демонстрації нового матеріалу. При вивченні функції косинус до них належать: таблиці «Графік функції $y = \cos x$», «Основні властивості функції $y = \cos x$», шаблон (лекало) косинусоїди (для швидкого її зображення на дошці).

У класі математичного профілю при вивченні теоретичного матеріалу важливого значення набуває метод проблемного викладу знань. Проблемне вивчення нового матеріалу сприяє перетворенню знань учнів у переконання, пробуджує внутрішню потребу в знаннях. Проблемна ситуація ставить учня перед таким посильним пізнавальним завданням, подолання якого активізує його розумову діяльність. Вивчення таких, наприклад, тем, як «Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь» або «Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей» доцільно здійснювати проблемними методами. Проте не всім учням, навіть математичного профілю, посильний проблемний метод здобуття знань, тому його слід застосовувати диференційовано.

Отже, в класі математичного профілю переважна більшість тригонометричного матеріалу може бути «перевідкрита» самими учнями під керівництвом вчителя або ж вивчена ними самостійно вдома чи на уроці.

У класі гуманітарного профілю вивчення нового теоретичного матеріалу ми здійснювали переважно методами розповіді, пояснення з використанням наочності та прикладів. При цьому з частиною учнів класу проводилась підготовча робота щодо усунення прогалин в попередніх знаннях, які необхідні для засвоєння нових. Цьому слугують, зокрема, підготовчі, пропедевтичні вправи, які актуалізують необхідний навчальний матеріал. Наприклад, при вивченні теми «Властивості тригонометричних функцій» слід повторити зміст понять: «область визначення», «парність-непарність», «монотонність», «знакосталість» функції тощо. Пояснення вчителя супроводжуються неодноразовими повтореннями, звертається увага учнів на основне, суттєве, другорядні деталі опускаються.

Учні з низькими математичними здібностями потребують повільного темпу пояснення, чіткої і конкретної постановки цілей і задач уроку, тривалого розгляду окремих питань, особливого підходу до їх вивчення: від часткового, окремого до загального, сукупного, неоднократного повторення важливого, основного із застосуванням життєвих прикладів, порівнянь, співставлень. Для «слабких» учнів важливе не тільки число повторень, а необхідні повторення у порівнянні зі схожим матеріалом, з поступовим його ускладненням.

У класі гуманітарного профілю значну роль при вивченні теоретичного матеріалу мають відігравати просторові унаочнення, моделі (наочні методи навчання), які спрямовані на розвиток просторової уяви, активізацію мислення учнів. З цією метою доцільне застосування таблиць, схем, кодопозитивів, опорних конспектів. На початку вивчення теми кожному учню бажано запропонувати аркуш теоретичних знань (опорний конспект), в якому записані мінімально необхідні теоретичні відомості з теми: означення, властивості, формули, теореми тощо. Це значно спрощує для учнів процес засвоєння теоретичних знань, структурує ці знання, сприяє їх запам'ятовуванню та застосовуванню.

Для здійснення рівневої диференціації при вивченні теоретичного матеріалу в класі гуманітарного профілю доцільна організація багаторазового пояснення. Перше пояснення відбувається фронтально для всіх учнів класу. Після першого пояснення ті учні (перша група), які зрозуміли новий матеріал, приступають до самостійної роботи з підручником, що має на меті опрацювання щойно поясненого матеріалу. Друге пояснення адресовано учням 2-ї і 3-ї типологічної групи. При другому поясненні вчителю необхідно сконцентрувати увагу учнів на головних аспектах нового матеріалу і відкинути другорядні, виділити вузлові питання. Після другого пояснення учні 2-ї групи приступають до самостійної роботи з підручником, яка спрямована на репродуктивне засвоєння нового теоретичного матеріалу. Третє пояснення стосується учнів 3-ї групи, в той час, як всі інші учні самостійно працюють з підручником. При третьому поясненні доцільно застосовувати навідні запитання, які дають учням змогу здійснювати такі розумові операції, як аналіз, синтез, узагальнення, абстрагування на відповідному рівні. Завершується етап пояснення нового матеріалу фронтальною перевіркою самостійної роботи учнів 1-ї і 2-ї типологічної групи. Пояснення нового матеріалу необов'язково має бути потрійним, кількість повторень носить варіативний характер і залежить від ступеня складності матеріалу і відмінностей в навчальних можливостях учнів.

Домінуючими методами вивчення теоретичного матеріалу в класах природничих профілів, на наш погляд, мають бути евристична бесіда, елементи шкільної лекції, дослідницька діяльність учнів. У процесі евристичної бесіди вчитель уміло поставленими запитаннями спрямовує учнів на формування нових понять, засвоєння правил, формулювання висновків. Під час вивчення теми «Функція $\sin x$, її властивості і графік» методом евристичної бесіди учні під керівництвом вчителя самостійно формулюють властивості функції синус і будують її графік. Наприклад, вчитель «наводить» учнів на з'ясування області визначення функції синус за допомогою системи запитань:

1. Що називається функцією $y = \sin x$?

2. Як пов'язує функція $y = \sin x$ довільне дійсне число x і точку одиничного кола?

3. Чи існує дійсне число x, якому не відповідає жодна точка одиничного кола?

4. Відповідність між якими множинами задає функція $y = \sin x$?

5. Які точки на одиничному колі відповідають дійсним числам $0, 1, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi, -1$?

6. Що називається областю визначення довільної функції $y = f(x)$?

7. Яка область визначення функції $y = \sin x$?

Диференційований підхід до учнів в процесі евристичної бесіди полягає в «адресності» запитань різного типу в умовах фронтальної роботи. Так, «слабшим» учням призначаються загальні питання, що потребують відповіді «так» чи «ні»; спеціальні питання, що починаються зі слів: «де», «коли», «хто», «що» тощо, відповіді на які не потребують складних розумових операцій. «Сильнішим» учням необхідно адресувати запитання альтернативного характеру, які потребують розгорнутої і аргументованої відповіді з елементами власних суджень і вимагають таких розумових операцій, як аналіз, синтез, порівняння, узагальнення тощо.

Важливою особливістю методів вивчення теоретичного матеріалу в класі природничого профілю, як виходить із специфіки самого профілю, є їхня розвивально-дослідницька функція. Методи вивчення теоретичного матеріалу мають бути спрямовані на розвиток в учнів дослідницьких умінь. Елементи дослідницької діяльності доцільно пропонувати учням під час вивчення властивостей тригонометричних функцій, розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь і нерівностей, виведення окремих тригонометричних формул. При вивченні, наприклад, найпростіших тригонометричних рівнянь, учням доцільно запропонувати дослідити кількість розв'язків рівняння $\sin x = a$ залежно від значення параметра a. Далі, аналогічно, учні досліджують інші найпростіші тригонометричні рівняння $\cos x = a$, $\mathrm{tg}\, x = a$, $\mathrm{ctg}\, x = a$. Виходячи з властивостей функції синус, учні досліджують властивості оберненої до неї функції — арксинус.

Таким чином, урахування пізнавальних можливостей учнів, особливостей навчального профілю є необхідною умовою ефективного засвоєння теоретичного матеріалу з тригонометрії, усвідомлення суті його основних понять і тверджень.

Перспективи подальших розвідок розглянутої проблеми можуть бути пов'язані з підготовкою студентів педагогічних вузів, майбутніх вчителів до диференційованого навчання математики, зокрема тригонометричного матеріалу. На часі також завдання удосконалення існуючого та розробки нового навчально-методичного забезпечення для навчання тригонометричного матеріалу в профільній школі.

Література

1. *Владимирцева С. А.* Об изучении первых тем тригонометрии // Математика в школе. — 2005. — № 3. — С. 16–21.
2. *Грохольська А.* Про можливості паралельного вивчення трансцендентних рівнянь та нерівностей // Математика в школі. — 2005. — № 4. — С. 30–34.
3. *Забранський В. Я., Грицик Т. А.* Диференціація змісту тригонометричного матеріалу у профільній школі // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнар. зб. наук. робіт. — Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2008. — Вип. 30.
4. *Мордкович А. Г.* Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе // Математика в школе. — 2002. — № 6. — С. 32–38.
5. *Овчинникова Т.* Особливості вивчення тригонометричних функцій числового аргументу в профільних класах // Математика в школі. — 2007. — № 1. — С. 38–44.
6. *Тарасенкова Н. А.* Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики: Монографія. — Черкаси: Відлуння-Плюс, 2002. — 400 с.
7. *Чашечникова О. С., Чашечникова Л. Г.* Використання тригонометричного матеріалу з метою розвитку творчого мислення учнів: Матеріали Всеукр. наук-практ. конф. [«Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики»]. — К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2004.

Т. А. ГРИЦИК,
аспірантка Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова.

УДК 378.853

ІННОВАЦІЙНІ ПІДХОДИ ДО ТЕСТУВАННЯ З ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ В УМОВАХ КРЕДИТНО-МОДУЛЬНОЇ СИСТЕМИ ОРГАНІЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ

В статті аналізуються методи контролю та корекції знань. Пропонуються варіанти тестових завдань з теоретичної фізики, які стимулюють активну самостійну діяльність студентів, впливають на мотивацію до навчання, активізують пізнавальну діяльність студентів і реалізують індивідуалізацію їх навчання за рахунок самостійного вибору темпу та послідовності вивчення матеріалу. Обгрунтовується доцільність проведення таких тестувань.

In the article analyses methods of control and correction of knowledges, in particular knowledges from theoretical physics. The variants of test tasks are offered from theoretical physics stimulate active independent activity of students, influence on motivation to the studies, will activate cognitive activity of students, and will realize individualization of their studies due to the independent choice of rate and sequence of study of material. Expedience of leadthrough of such tests is grounded.

Початок XXI століття пов'язаний з появою нових інформаційних технологій, які значно впливають на підвищення темпів економічного розвитку країни, на впровадження нових методик навчання та модернізацію професійно-технічної освіти. Пріоритетним завданням системи освіти є підготовка фахівців високого класу для науково-дослідної діяльності як основи технічного та технологічного прогресу. Фізика як фундаментальна наука має велике світоглядне значення, особливо для студентів педагогічних навчальних закладів. Формування дієвих знань з фізики у зв'язку з приєднанням України до Болонської декларації вимагає від викладача винахідливості та компетенції для забезпечення самостійної роботи студентів, здійснення об'єктивного контролю і корекції їх навчальної діяльності у принципово нових умовах навчання.

Теоретичні основи контролю знань як одного з методів педагогічного стимулювання висвітлені в працях відомих педагогів і психологів. Контроль результатів навчально-пізнавальної діяльності розглядали вчені-методисти: С. У. Гончаренко, Є. В. Коршак, А. І. Павленко, О. В. Сергеєв, В. І. Баштовий, Н. М. Коршак та ін. Використання багатобальної шкали оцінювання компетенції висвітлено в працях В. С. Авансова, В. І. Нечета, Н. В. Подопригори, Е. М. Соколовської та ін.

Ці дослідження стосуються змісту поняття контролю та його співвідношення з перевіркою знань, дослідженням форм, методів і засобів контролю, реалізації його функцій в умовах раціональної моделі навчання. Стосовно вищих педагогічних навчальних закладів в умовах реалізації Болонської угоди проблема педагогічного контролю та корекції навчальної діяльності студентів розглядалася побічно.

Введення кредитно-модульної системи у вищих навчальних закладах призводить до кардинальних змін у структурі змісту, методів, форм і засобів підготовки майбутніх спеціалістів та вимагає перегляду контрольно-оцінювального компонента навчального процесу. Виникають реальні суперечності між новими вимогами до сучасного рівня знань, навичок та умінь майбутніх фахівців та недостатнім рівнем методичної і матеріально-технічної бази навчальних закладів; між традиційним підходом до здійснення контролю знань студентів з фізики та необхідністю суттєвої реорганізації системи контролю в умовах кредитно-модульної системи навчання фізики. Існування цих суперечностей свідчить про наявність проблеми, що потребує розв'язання. Їх усунення можливе через введення інноваційних технологій навчання, використання навчальних комп'ютерних програм з фізики різного типу, застосування багатобальної шкали оцінювання та відповідної шкали контролю. Отже існує необхідність дослідження проблеми комплексного контролю та корекції навчальної діяльності студентів вищих педагогічних навчальних закладів в процесі вивчення курсу теоретичної фізики.

В процесі підготовки спеціалістів у вищій педагогічній школі (педагогічний інститут, університет) майбутній вчитель фізики повинен досконало оволодіти всім величезним експериментально-теоретичним масивом сучасних знань з фізики (загальної і теоретичної) та методами і методиками їх дидактичної трансляції в навчальні системи диференційованого навчання в школі. Результати досягнень протягом довгого часу будуть слугувати змістовно-дисциплінарною («онтодидактичною») основою професійної діяльності вчителя, забезпечувати можливість орієнтування в нових досягненнях фізичної науки та інноваційних технологіях і методиках навчання фізики. Однак, як відомо, на шляху практичної реалізації цього «ідеалу» виникає низка проблем як об'єктивного характеру (наприклад, психологічні закономірності «забування» інформації, яка безпосередньо не використовується), так і суб'єктивного (недосконалість дидактичних процесів, низька якість засвоєння знань, їх несистемний характер тощо).

Саме на послаблення суб'єктивних чинників на шляху підготовки компетентних вчителів фізики і спрямована науково-методична і організаційно-методична діяльність колективів вищої педагогічної школи. Зокрема, це стосується і пошуків нових методів та форм контролю за ефективністю і результативністю засвоєння фізичних знань. При цьому в експериментальних дослідженнях ефективності нових методичних розробок широко використовуються статистичні методи.

В процесі обробки результатів педагогічних експериментів використовують метод поелементного аналізу відповідей студентів. Тут для цілей десуб'єктивації результатів експериментів використовується поняття смислових елементів навчального матеріалу [8], тобто такі його найменші складові, які ще зберігають самостійний фізичний зміст. Вважається, що використання методу поелементного аналізу відповідей (у різних формах, аж до використання мікротворів [3]) учнів і студентів забезпечує можливість визначення об'єктивної оцінки повноти засвоєння ними явищ, фактів, понять, законів фізики, повноти сформованості умінь (тобто тих «крупних» одиниць навчального матеріалу, які безпосередньо входять у зміст мети навчання фізики). Зрозуміло, що ця «об'єктивність» результатів експериментальних досліджень базується на припущенні певної змістовної «інваріантності» смислових елементів навчального матеріалу (на відміну від понять, законів, теорій) згідно з критерієм складності логічної структури. Тому і використовують порівняно «універсальні» критерії класифікації змістовних елементів курсу фізики [5; 10—11]:

— зміст фізичної величини чи поняття;
— констатація зв'язків фізичних величин;
— характер цих зв'язків;
— формули, які відображають характер зв'язків величин мовою математики;
— наукові факти, твердження;
— умови спостерігання явищ чи виконання законів, межі використання фізичних теорій;
— формулювання правил, визначень, законів; елементи пояснення явищ;
— факти політехнічного характеру, які розкривають призначення, принцип дії чи будову технічного приладу, вказівки щодо підпорядкованості наукових положень (які з них вихідні, а які — наслідкові).

Безумовно, для більш-менш уніфікованої середньої школи такі методи експериментального дослідження результатів навчання фізики за різними методиками і технологіями є корисними і дають уяву про змістовно-усереднені успіхи «усередненого» учня у вивченні фізики. Але технології навчання учнів фізики наукового особистісного типу [4] чи особливо фундаментальна підготовка з фізики майбутніх вчителів вимагають розробки та практичного використання таких методів контролю ефективності і результативності навчання фізики, які хоча б на якісному рівні враховували:

1) експериментально-теоретичний характер структури й закономірностей розвитку фізичного знання;

2) фундаментально-нефундаментальні структури як емпіричного, так і теоретичного рівнів фізичного знання;

3) специфічно науковий характер логіки фізичного мислення, яка на найістотніших фазах наукової (і пізнавальної) творчості (наприклад, при переході з емпіричного на теоретичний рівень конкретного знання) вступає в постійне протиріччя із законами формальної логіки (набуває алогічного, з точки зору математики, характеру);

4) системний характер сучасного фундаментального фізичного знання як методу розуміння (кількісного і якісного пояснення) різноманіття проявів фізичної реальності;

5) особистісні аспекти розвитку наукової форми свідомості учня чи студента в процесі навчання фізики.

Зауважимо, що на врахування цих вимог спрямовано нову модель способу фундаментального навчання фізики майбутніх вчителів фізики, і саме ця модель виявляє необхідність істотного удосконалення методів і форм контролю результатів навчання.

Детальний аналіз як відповідної цьому способу навчання фізики моделі структуризації пізнавальної активності, так і результатів відповідно акцентованого багаторічного контролю знань студентів з курсів теоретичної фізики та спецкурсів професійного спрямування, дозволяє сформулювати критеріально-змістовні вимоги до методів і форм експериментального дослідження (та практичного використання) доцільної міри засвоєння фундаментальних фізичних знань майбутніми вчителями фізики. Ось головні з них:

• необхідно робити акцент на «інтегральній» структурі сучасного фізичного знання «поняття — закони — фундаментальні теорії, фундаментальні моделі фізичної реальності — система фундаментальних теорій» при оцінці ефективності засвоєння студентом кожного змістовного елементу. При цьому досягнення студентом саме теоретичного рівня оволодіння кожним структурним елементом виступає головним критерієм ефективності як конкретної технології фундаментальної підготовки майбутнього вчителя, так і індивідуальної «готовності» студента до педагогічної діяльності. Фактор важкості засвоєння матеріалу (що зумовлюється об'єктивною предметною його складністю) варто «пом'якшувати» саме змістовно-системним характером (з експлікацією необхідності всіх взаємозв'язків, змістовних «метаморфоз», предметної обмеженості тощо) як під час показу структурного елементу, так і контролю в міру його засвоєння студентом;

• фундаментальні структурні елементи знання (на відміну від так званих нефундаментальних) повинні кожним студентом засвоюватися повністю. Це означає, що як поняття, закони і теорії, так і загальновживані «змістовні елементи» будь-якого фізичного знання не є «інваріантними» відносно цілей фундаментальної підготовки з фізики. Наприклад, навіть повне відтворення студентом великої кількості нефундаментальних понять чи законів не може «компенсувати» неповне засвоєння ним одного фундаментального поняття чи закону. Тому традиційні статистичні методи обробки педагогічного експерименту, якщо тут і мають сенс, то або з використанням великих (і невідомо яких) «вагових поправок» на фундаментальність елементу знання чи вміння, або (що значно доцільніше) лише після детермінованої конкретною теорією навчання змістовної «локалізації» методу контролю (наприклад, лише за певної кількості фундаментальних елементів знання); необхідно акцентувати значно більшу увагу на контролі засвоєння студентами тих «ключових» елементів логіки фізичного пізнання, які пов'язані з науковими «процедурами» переходу з емпіричного рівня знань на теоретичний рівень, інакше кажучи, які пов'язані зі способами конструювання ідеалізованого (абстрактного) світу фізичної науки. Саме повне опанування студентом таких процедур робить вирішальний внесок у формування дійсно наукового стилю мислення, і саме ці елементи наукової логіки викликають, як свідчить практика, найбільші труднощі для студентів, бо тут порушуються звичні закони формально-логічної раціональності. Конкретну увагу тут необхідно зосередити на контролі міри засвоєння науково-пізнавальних процедур ідеалізації реальних об'єктів та умов їх існування і конструюванні принципово неспостережуваних (але необхідних для формулювання теоретичних законів) ідеалізованих об'єктів.

У процесі вивчення більшості дисциплін велика увага надається тестовому контролю знань і умінь студентів. Але деякі істотні особливості такого контролю, зокрема, неможливість фіксації перебігу думок студентів в процесі пошуку відповідей до розв'язання комбінованих задач, не забезпечують об'єктивності контролю і оцінювання досягнень студентів в процесі вивчення теоретичної фізики. Як фундаментальна фізична наука теоретична фізика «…містить найбільшу кількість фізичних теорій, які охоплюють всі розділи фізики, є фундаментом знань про характер процесів і явищ. Теоретичній фізиці належить вирішальна роль в завершенні підготовки фахівця-фізика, формуванні наукового світогляду майбутнього вчителя, який повинен мати цілісне уявлення про сучасну фізичну картину світу, вміти розв'язувати практичні і теоретичні задачі сучасної фізики, бути підготовленим до сприйняття новітніх ідей фізики XXI сторіччя» [7, 46].

Більшість завдань з теоретичної фізики, визначених для перевірки знань і умінь студентів, складаються із задач, розв'язки яких характерні об'ємним змістом і використанням складного математичного апарату. Перевірка виконаних студентами завдань — процес дуже трудомісткий і вимагає значних витрат часу. Тому необхідні й інші форми контролю, зокрема, тестовий контроль, який характерний такими особливостями як «безпосередня фіксація результатів; можливість використовування як в індивідуальній роботі, так і в груповій; зручність математичної обробки; відносна короткотривалість; наявність встановлених стандартів і норм» [9, с. 226]. Разом з реалізацією таких особливостей важливо зважати і на негативний вплив, на необ'єктивність оцінювання, викликаного можливістю вгадування або запам'ятовування запропонованих вірних відповідей.

В процесі проектування і складання тестових завдань ми керувалися такими вимогами:

1) визначити, що необхідно з'ясувати з допомогою тестових завдань. Це може бути перевірка рівня оволодіння фактичним матеріалом, розуміння окремих положень, вибір методу або способу вирішення проблеми, вміння оперувати математичним апаратом та ін. Відповідно визначалися критерії згідно з необхідністю вибору тестового завдання, складністю його виконання;

2) чітко визначати і організовувати процес виконання тестових завдань, передбачати і враховувати витрачений час, послідовність відбору і обробки одержаних результатів;

3) зіставити одержані результати з аналогічними результатами традиційних методів перевірки знань і умінь, вжити заходи для створення умов підвищення ефективності впровадження відповідних форм контролю.

Для виявлення у студентів рівня знань фактичного матеріалу, розуміння окремих теоретичних положень, оволодіння математичним апаратом позитивно зарекомендували себе тести, вибудовані на основі функціонально-структурного аналізу вивченого матеріалу. Запитання і відповіді такого роду тестових завдань складають логічно пов'язаний ланцюг, в якому кожне наступне питання підводить студента до більш глибокого і різнобічного аналізу понять і закономірностей. Відповідно до класифікації завдання таке є свого роду програмою відбору, групування і порівняння [9, 227].

Враховуючи все вищесказане, ми пропонуємо такий підхід до складання тестових завдань, метою виконання яких є виявлення рівня оволодіння студентами достатнім обсягом теоретичного матеріалу як з фізики, так і вищої математики, вміння здійснювати змістовний фізичний аналіз запропонованої умови завдання і кваліфіковано виконати складні математичні перетворення. Процес виконання таких завдань порівняно тривалий. В той же час тестовий контроль не повинен знижувати його якість. Також важливо вжити заходів до нераціонального використання часу на перевірку.

Очевидно, що використання традиційних «закритих» [6, 20] тестів не тільки не забезпечує фіксації ходу думок студентів в процесі розв'язування задач, але й викликає сумніви щодо можливості відгадування правильної відповіді з переліку запропонованих. Разом віддати перевагу лише «відкритим» завданням — те ж саме, що вилучити орієнтовно-стимулюючі елементи для студента, а для викладача — умови для поелементного аналізу виконаного завдання і виявлення наявності помилок.

Об'єднання позитивних якостей розглянутих видів тестових завдань сприяло складанню нами специфічних завдань, які:

1) випереджають відгадування відповідей, потребують виконання всіх етапів розв'язку задачі;

2) коригують хід думок студента;

3) дозволяють проаналізувати результати окремих етапів процесу розв'язку задачі і визначити, на якому з них допущено помилки;

4) значно скоротити витрати часу і спростити процес перевірки завдань.

Зміст такого тестового завдання складається з умови задачі, яка звичайно відбирається з традиційних збірок [1; 2]. Окрім завдання, визначеного умовою задачі, тестове завдання містить ще декілька запитань для визначення проміжних результатів. Серії відповідей до питань (наприклад 3–5 варіантів, серед яких лише один вірний) даються не до кожного з них, а лише до одного-двох проміжних і, звичайно, останнього. Одержана проміжна відповідь ідентична одній з наведених і є критерієм правильності виконаної частини розв'язку та орієнтиром до виконання наступного етапу. Відсутність наведених відповідей до певного проміжного результату, який необхідно зафіксувати, виключає можливість відгадування, вимагаючи виконання розв'язку.

Ефективним визнаний прийом, за яким до розрахункових задач наведено відповіді не кількісних значень, а математичних виразів або якісного характеру. Студенту пропонується зафіксувати формулу або математичний вираз, за допомогою якого розраховується кількісний результат. У свою чергу такий прийом також виключає вірогідність відгадування. До перевірки подаються виконані завдання, оформлені відповідно до певних стандартів. Зручніше організовувати процес, використовуючи відповідно спроектовані стандартні бланки з умовами, а для перевірки використовувати заготовлені коди.

Критерії оцінювання тих або інших тестових завдань визначаються викладачем. Зрозуміло, що відсутність правильних відповідей до питань, для яких не наведено варіанти відповідей, навіть за наявності решти вірних відповідей, змушує вважати, що розв'язок, виконаний неповністю і завдання не можуть бути оцінені високим балом.

Як зразок наводимо варіант такого тестового завдання — задачі і варіант її розв'язку до розділу термодинаміки з теоретичної фізики.

Тестове завдання. Відомо, що сила натягу гумової нитки фіксованої довжини пропорційна термодинамічній температурі, тобто $f = aT$, $a > 0$ і залежить тільки від довжини нитки. Довести, що внутрішня енергія нитки є тільки функцією температури, а ентропія нитки зменшується по мірі збільшення довжини. Показати, що при адіабатичному видовженні нитки її температура збільшується.

Розв'язок:

1) Враховуючи вираз $\delta A = f_1 d\zeta_1 + f_1 d\zeta_1 + \ldots$ для роботи через узагальнені сили, запишемо співвідношення $dF = -SdT - pdV$ для гумової нитки у вигляді $dF = -SdT - fdl$, де $F = F(l,T)$ — вільна енергія нитки, S — її ентропія.

2) З останньої формули видно, що $-S = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_l$, $f = \left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)_T$.

3) Замінюючи в $F = U - TS$ вираз для ентропії його значенням, отримаємо ________.

4) Диференціюючи останній вираз по l при $T = \text{const}$ знаходимо $\left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_T + T\frac{\partial^2 F}{\partial l \partial T}$.

5) З урахуванням ________ ця рівність приймає вигляд $f = \left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_T + T\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_l$.

6) Підставляючи в цей вираз $f = \alpha T$, отримаємо ________, тобто внутрішня енергія нитки ________ від її видовження.

7) Диференціюючи $f = \left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)_T$ по l при ________, знаходимо $\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T = -\frac{\partial^2 F}{\partial l \partial T} = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_l = -\alpha < 0$, тобто ентропія ________ із збільшенням довжини нитки.

8) При адіабатичному квазістатичному збільшенні довжини нитки при $S = \text{const}$ і, враховуючи $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$, можна записати ________.

9) З формули $dS = C_V \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV$ видно, що $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_l = \frac{C_l}{T}$, тому $\left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_S = -\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_l}$ приймає вигляд ________, де вже прийнято до уваги $\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_l = -\alpha < 0$. Відповідно, при адіабатичному видовженні нитки її температура ________.

Зразок бланка для студента

Тема. Квазістаціонарне електричне поле 1 варіант

Прізвище та ініціали,
шифр групи Скворцов І.В. — 42-Ф

3. $F = U - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_l$

5. $f = \left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)_T$.

6. не залежить
7. T = const зменшується

8. $\left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_S = -\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_l}$

9. $\left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_S = -\frac{T}{C_l}\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T = \frac{\alpha T}{C_l} > 0$ підвищується

Пропонуємо приклад тесту для теми «Статистична фізика» з курсу «Теоретична фізика».

Тестове завдання. Двовимірний гармонійний осцилятор володіє $(n+1)$-кратно виродженими енергетичними рівнями $\varepsilon_n = h\nu(n+1)$. Розрахувати середню енергію і теплоємність системи, що складається з N незалежних двовимірних гармонійних осциляторів.

Розв'язок:

1) Статистична сума Z системи, що складається з N незалежних двовимірних гармонійних осциляторів, дорівнює .

2) Позначимо за $\beta = \frac{h\nu}{kT}$ і отримаємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)e^{-\beta(n+1)} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta(n+1)} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{e^{\beta}-1} = \frac{e^{\beta}}{\left(e^{\beta}-1\right)^2}.$$

Отже, остаточний вираз для статистичної суми набуває вигляду .

3) Середню енергію обчислимо за формулою

$$E = kT^2\frac{\partial}{\partial T}\ln Z = kT^2\frac{\partial}{\partial T}\ln\left[\frac{1}{N!}\frac{e^{-h\nu/kT}}{\left(1-e^{-h\nu/kT}\right)^2}\right]^N.$$

4) Скористаємось формулою Стірлінга для перетворення $N!$ (це дуже непогане наближення для системи, що складається з великої кількості частинок): , тоді

$$\ln\left[\frac{1}{N!}\frac{e^{-h\nu/kT}}{\left(1-e^{-h\nu/kT}\right)^2}\right]^N \approx N\left[N\ln\frac{N}{e} - \frac{h\nu}{kT} - 2\ln\left(1-e^{-h\nu/kT}\right)\right],$$

далі

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[N^2\ln\frac{N}{e} - \frac{h\nu N}{kT} - 2N\ln\left(1-e^{-h\nu/kT}\right)\right] = \frac{Nh\nu}{kT^2} - 2N\frac{e^{-h\nu/kT}}{1-e^{-h\nu/kT}}\left(\frac{h\nu}{kT^2}\right) =$$

$$= \frac{N}{kT^2}\left[h\nu - \frac{2h\nu e^{-h\nu/kT}}{e^{-h\nu/kT}\left(e^{h\nu/kT}-1\right)}\right] = \frac{N}{kT^2}\left[h\nu - \frac{2h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}\right].$$

5) Таким чином формула для середньої енергії набуває вигляду

$$E = kT^2\frac{N}{kT^2}\left[h\nu - \frac{2h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}\right] = N\left[h\nu - \frac{2h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}\right].$$

6) Теплоємність системи обчислимо за формулою

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{\partial}{\partial T}\left(N\left[h\nu - \frac{2h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}\right]\right)_V = Nh\nu\frac{\partial}{\partial T}\left(1 - \frac{2}{e^{h\nu/kT}-1}\right) =$$

$$= Nh\nu(-2)\frac{-1}{\left(e^{h\nu/kT}-1\right)^2}e^{h\nu/kT}\left(-\frac{h\nu}{kT^2}\right) = \quad .$$

Для отримання остаточної відповіді у вигляді гіперболічної тригонометричної функції введемо заміну.

7) Нехай $x = \frac{h\nu}{2kT}$, тоді

$$C_V = -2Nk\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2\frac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2} = -2Nk\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2\frac{1}{e^{-2x}\left(e^{2x}-1\right)^2} =$$

$$= -2Nk\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2\frac{1}{\left(e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)\right)^2} == -2Nk\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2\frac{1}{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^2} =$$

$$= -2Nk\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2\frac{1}{4\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}Nk\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2\frac{1}{sh^2\,x},$$

врахувавши введену нами заміну, остаточно отримаємо

.

Відповідь: .

Зразок бланка для студента

Тема. Квазістаціонарне електричне поле 1 варіант

Прізвище та ініціали,
шифр групи Скворцов І.В. — 42-Ф

1. $Z = \frac{1}{N!}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)e^{-\frac{h\nu(n+1)}{kT}}\right]^N$

2. $Z = \frac{1}{N!}\left[\frac{e^{-h\nu/kT}}{\left(1-e^{-h\nu/kT}\right)^2}\right]^N$

4. $N! \approx \left(\frac{N}{e}\right)^N$ $\qquad \frac{N}{kT^2}\left[h\nu - \frac{2h\nu e^{-h\nu/kT}}{1-e^{-h\nu/kT}}\right]$

6. $= -2Nk\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2\frac{e^{h\nu/kT}}{\left(e^{h\nu/kT}-1\right)^2}$

7. $C_V = -\frac{1}{2}Nk\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 sh^{-2}\left(\frac{h\nu}{2kT}\right)$

Відповідь: $E = N\left[h\nu - \frac{2h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}\right]$; $C_V = -\frac{1}{2}Nk\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 sh^{-2}\left(\frac{h\nu}{2kT}\right)$

Дані тести відкритого безальтернативного типу для відповідного модуля курсу теоретичної механіки, в яких відповідь на завдання вимагає розв'язання фрагментів задачі і подається в числовому безрозмірному вигляді. Таке компонування тесту виключає можливість вгадування і дозволяє об'єктивно оцінити засвоєння матеріалу відповідного модуля. Таким чином, ця модульно-рейтингова технологія відрізняється від пропонованих у деяких вищих навчальних закладах тим, що припускає здійснення контролю з подальшою корекцією залишкових знань студентів; використовує впровадження порівняно об'ємних задач до тестових завдань.

Такі варіанти тестових завдань з теоретичної фізики стимулюють активну самостійну діяльність студентів, впливають на мотивацію до навчання, активізують пізнавальну діяльність студентів та реалізують індивідуалізацію їх навчання за рахунок самостійного вибору темпу і послідовності вивчення матеріалу; можливості повернення до повторного вивчення; наявності вказівок для подальших дій студента; наявності простого та зручного інтерфейсу та повідомлень про подальші дії студента.

Література

1. *Гречко Л. Г., Сугаков В. И., Томасевич О. В., Федорченко А. М.* Сборник задач по теоретической физике. — М.: Высш. шк., 1984. — 319 с.
2. *Жирнов Н. И.* Задачник-практикум по электродинамике. — М.: Просвещение, 1970. — 350 с.
3. *Зорина Л. Я.* Дидактические основы формирования системности знания старшеклассников. — М.: Педагогика, 1978.
4. *Нечет В. І.* Основи теорії навчання фізики в загальноосвітній середній школі.
5. *Нурминский Й. Й., Гладышева Н. К.* Статистические закономерности формирования знаний и умений учащихся. — М.: Педагогика, 1991.
6. Практикум по методике решения физических задач: Учеб. пособие для физмат., фак. пед. ин-тов / В. И. Богдан, В. А. Бондарь, Д. И. Кульбицкий, В. А. Яковенко. — Минск, 1983. — 272 с.
7. Программы для физико-математических факультетов педагогических институтов: Сб. № 2 / Под общ. ред. Н. И. Шкиля, Г. П. Грищенка. — К., 1992. — 144 с.
8. *Попов И. С.* Об усвоении учащимися нового материала // Советская педагогика. — 1966. — № 7.
9. Розв'язування навчальних задач з фізики: питання теорії і методики / С. У. Гончаренко, Є. В. Коршак, А. І. Павленко, О. В. Сергєєв, В. І. Баштовий, Н. М. Коршак; За заг. ред. Є. В. Коршака. — К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2004. — 185 с.
10. Розв'язування задач з фізики: Практикум / За заг. ред. Є. В. Коршака. — К.: Вища шк., 1986. — 312 с.
11. *Смирнов В. И.* Проверка конспектов лекций как средство активизации самостоятельной работы студентов // Активизация познавательной деятельности студентов / Рост. пед. ин-т. — Ростов н/Д, 1974. — Вып. 1. — С. 84—87.

О. М. ГУР'ЄВСЬКА,
аспірантка кафедри фізики та методики її викладання Кіровоградського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка,

Н. В. ПОДОПРИГОРА,
канд. пед. наук, доцент, Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В. Винниченка.

УДК 371.134

СТВОРЕННЯ ТРЕНІНГІВ В ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ»

Новим підходом у вивченні дисципліни «Математика для економістів», який сприяє формуванню творчої особистості та значно покращує якість засвоєння нових знань і вмінь, є створення студентами тренінгів з окремих тем даної дисципліни. В статті детально розглянуто суть цього підходу і дано рекомендації щодо його використання в навчальному процесі.

A new approach in studying of «Mathematics for economists» subject, which helps forming a creative individuality and improves quality of new knowledges and skills acquiring, is passing of the trainings at the certain topics of the given subject by the students. In the article the aim of this approach is examined in details and the recommendations concerning its usage in the education process are given.

Основним напрямком в сучасній системі вищої освіти є формування творчої особистості, здатної до самостійної діяльності. Як показують дослідження психологів, вміння творчо вирішувати проблеми є одним із механізмів психологічного захисту людини в складних життєвих умовах, що пов'язані з її трудовою діяльністю, соціальними та економічними кризами. Саме творчий професійний потенціал кожної особистості забезпечує найбільш суттєві прогресивні зміни як у виробництві, так і у соціумі. Крім того, рівень творчої самореалізації людини тісно пов'язаний з її психічним здоров'ям. Цим пояснюється значне збільшення в навчальних програмах вищих навчальних закладів частки самостійної роботи, порівняно з аудиторною, що є причиною більшості ускладнень, які виникають у студентів під час навчання, особливо у першокурсників. Добре відомо, що школа не готує своїх учнів до такого обсягу самостійної роботи. На жаль, значна частина студентів першого курсу не вміє знаходити потрібну інформацію у підручниках, виділяти з неї головне, узагальнювати, систематизувати і робити висновки. Однак зазначені вище навички є базовими для студентів вищих навчальних закладів.

У зв'язку з цим актуальним є питання вибору технологій навчання. Всі сучасні технології поділяються на дві групи за їх цільовою спрямованістю [1, 2]:

1) предметно орієнтовані, які в першу чергу забезпечують засвоєння системи знань, умінь і навичок з дисципліни;

2) особистісно орієнтовані, які реалізують гуманістичні цілі та принципи орієнтованого на особистість навчання.

Для покращання якості вивчення дисципліни «Математика для економістів» ми застосовуємо новий підхід, який можна віднести до кожної з зазначених вище груп. Він є особистісно орієнтованим, підвищує ефективність засвоєння навчального матеріалу, а також сприяє адаптації першокурсників до вимог навчальної програми. Цей підхід полягає у створенні кожним студентом комп'ютерного тренінгу з окремих тем курсу, що вивчається.

Відзначимо, що популярність використання тренінгових технологій у підготовці фахівців різних напрямків останнім часом зросла. Методичною розробкою психолого-педагогічних тренінгів сьогодні займаються К. Роджерс, М. Васильєв, І. Вачков, Л. Петровська, Є. Мельбруд, А. Гревцов, С. Дерябо, Л. Шепелєва, А. Толщин, Т. Зайцева, В. Кокоренко, О. Прутченкова, О. Сидоренко. Експериментальному використанню тренінгів у підготовці фахівців присвячено публікації Л. Козлової, Г. Кошонько, Л. Мітіної, В. Павловського, Т. Цюман. Питаннями застосування тренінгів при підготовці економістів займаються К. Копняк, В. Копняк, В. Орлов, В. Кобзєва, С. Степанова, Г. Баранова та інші. Але в усіх цих розробках, як показано в [4], студенту відводиться роль виконавця низки завдань, а не автора тренінгу. Наш підхід сприяє ефективному засвоєнню, поглибленню та узагальненню знань з дисципліни «Математика для економістів», якісному покращанню набутих навичок і вмінь щодо розв'язання практичних завдань, розширенню уявлень про класи задач, які застосовуються в економіці, одержанню знань про комп'ютерне програмне забезпечення, що може використовуватися при розв'язанні математичних задач, набуттю вмінь ним користуватися та складати нові програми щодо розв'язання задач, які відповідають програмі дисципліни «Математика для економістів». При цьому формується здатність мислити творчо та критично.

Тренінги можна створювати після вивчення кожної теми курсу. Але тоді виникають проблеми з контролем за самостійністю виконання завдання. Оскільки нашою метою є зробити процес навчання творчим і особистісно орієнтованим, то ми радимо відводити в навчальній програмі години на створення тренінгів. Наприклад, проводити в кінці другого семестру навчальну практику. Термін проходження навчальної практики повинен становити 2 тижні або 2 кредити (108 годин).

Запропонована нами методика була апробована в 2008/2009 навчальному році у Вінницькому фінансово-економічному університеті при вивченні дисципліни «Математика для економістів» студентами першого курсу спеціальності «Економічна кібернетика». На інших спеціальностях університету («Менеджмент організацій», «Фінанси і кредит», «Бухгалтерський облік») ми використовували стандартні методики навчання. На початку навчального року студенти всіх спеціальностей проходили тестування для визначення рівня їх підготовки. За показниками успішності, в бік їх погіршення, спеціальності розташувалися таким чином: «Фінанси і кредит», «Бухгалтерський облік», «Економічна кібернетика», «Менеджмент організацій». Згідно з навчальною програмою вивчення дисципліни «Математика для економістів» завершується іспитом. Нами був проведений іспит, який складався з комп'ютерного тестування та письмової роботи. За результатами іспиту вищу якість знань показали студенти спеціальності «Економічна кібернетика». Вони продемонстрували краще засвоєння навчального матеріалу за наступними критеріями: володіння основними математичними поняттями, раціональне виконання операцій з ними та застосування до розв'язування практичних задач економічного спрямування, вміння вибирати раціональний підхід до розв'язання поставленої задачі з використанням сучасних засобів обчислювальної техніки і пакетів прикладних програм.

Далі пояснимо суть нашого підходу. В кінці другого семестру студенти проходять навчальну практику в комп'ютерних класах на базі університету. Формою контролю є диференційований залік. Обов'язковим є оформлення та захист звіту. Успішне виконання завдань навчальної практики досягається при вивченні та засвоєнні питань, що дозволяють підвищити теоретичну підготовку студентів, розвинути уміння та практичні навички.

Навчальна практика полягає у створенні тренінгів щодо вивчення дисципліни «Математика для економістів» за допомогою комп'ютера. Кожен студент отримує індивідуальне завдання щодо створення тренінгу з однієї навчальної теми дисципліни «Математика для економістів».

Ми пропонуємо своїм студентам створювати тренінги дотримуючись такої послідовності:

1. Познайомити користувача з темою вивчення: дати коротку характеристику матеріалу, що вивчається, і рекомендації щодо його вивчення.

2. Ознайомити користувача з літературою з даної тематики.

3. Чітко, доступно, з дотриманням логічної послідовності, але без доведення властивостей

та теорем, викласти теоретичний матеріал з даної теми. Означення та властивості проілюструвати на прикладах. При створенні тренінгу потрібно також врахувати всі фактори, які б сприяли швидкому запам'ятовуванню матеріалу, що вивчається.

4. Скласти список запитань щодо перевірки ступеня засвоєння теоретичного матеріалу. Розробити вказівки до знаходження відповіді на кожне з поставлених питань. Підібрати тестові запитання для оцінювання якості засвоєння теми.

5. Виділити класи задач, які розв'язуються в межах даної теми.

6. Пояснити методи, які використовуються для розв'язання задач кожного з класів. Скласти алгоритм знаходження розв'язання.

7. Навести умови завдань для самостійного розв'язання. Забезпечити, використовуючи сучасні засоби обчислювальної техніки і пакети прикладних програм, при розв'язанні кожного із завдань можливість звертатися до підказок, контролювати правильність розв'язання задачі на кожному з етапів, а також вірність отриманого результату. Зробити це таким чином, щоб користувач мав зручний доступ до потрібної йому інформації (наприклад, інформації про метод, який використовується для розв'язання завдання або для підготовки інформації про відповідь) і не був зобов'язаний ознайомлюватися з повними рекомендаціями.

8. Розробити тестові завдання для перевірки якості набутих практичних вмінь.

9. Дати загальну оцінку набутим знанням і рекомендації щодо їх покращання.

Нами також складено список завдань до практичної роботи, який охоплює всі теми курсу «Математика для економістів». Зазначимо, що ці завдання є нерівноцінними за обсягом виконуваної роботи і складністю навчального матеріалу, що обов'язково потрібно викладачеві врахувати перед закріпленням тем за студентами, зважаючи на рівень їх підготовки. Деякі завдання при потребі можна об'єднати або навпаки — розбити на кілька індивідуальних завдань.

Список завдань для практичної роботи:

1. Елементи теорії матриць і визначників.
2. Загальна теорія систем n лінійних рівнянь з n невідомими.
3. Загальна теорія систем m лінійних рівнянь з n невідомими.
4. Елементи векторної алгебри.
5. Елементи аналітичної геометрії.
6. Елементи теорії границь.
7. Неперервність функції.
8. Диференціальне числення функції однієї змінної.
9. Дослідження функції та побудова її графіка.
10. Диференційованість функції багатьох змінних.
11. Дослідження функції багатьох змінних функцій на екстремум, умовний екстремум.
12. Невизначений інтеграл.
13. Визначений інтеграл.
14. Невласні інтеграли та їх збіжність. Узагальнення поняття інтегралу.
15. Диференціальні рівняння першого порядку.
16. Диференціальні рівняння вищих порядків.
17. Числові ряди та їх збіжність.
18. Ступеневі ряди та їх застосування.
19. Ряди Фур'є.
20. Емпіричні та логічні основи теорії ймовірностей.
21. Основні теореми і формули теорії ймовірності, їх економічна інтерпретація.
22. Схема незалежних випробувань.
23. Випадкові величини та їх економічна інтерпретація.
24. Закони розподілу та числові характеристики випадкових величин.
25. Багатовимірні випадкові величини.
26. Закон великих чисел.
27. Граничні теореми теорії ймовірностей.
28. Елементи теорії випадкових процесів і теорії масового обслуговування.
29. Статистичне та інтервальне оцінювання параметрів розподілу.
30. Статистична перевірка гіпотез.
31. Елементи дисперсійного аналізу.
32. Елементи регресивного аналізу.
33. Елементи теорії кореляції.

Діяльність викладача під час навчальної практики полягає в наданні консультацій та здійсненні контролю за виконанням індивідуальних завдань. Докладніше питання організації практики висвітлено в [3]. В кінці практики студенти захищають звіт. Звіт до захисту подається на друкованій основі та електронному носієві. Вимоги до оформлення звіту є стандартними. Обсяг звіту становить 20—25 сторінок формату А4.

Структура звіту наступна:

— титульна сторінка
— зміст
— перелік умовних позначень (за необхідністю)
— вступ
— основна частина (структура тренінгу)
— висновки
— список використаних джерел
— додатки.

В результаті проходження запропонованої нами практики у майбутнього фахівця не лише поглиблюються знання з дисципліни «Математика для економістів» та її прикладного застосування, але й, що є досить важливим фактором, формується мотивація навчання, підвищується самооцінка, з'являється впевненість у власних силах. Процес навчання стає значно цікавішим, а співпраця з викладачем — творчою.

Література

1. *Дубасенюк О. А.* Інноваційні навчальні технології — основа модернізації університетської освіти // Освітні інноваційні технології в процесі викладання навчальних дисциплін: Зб. наук.-метод. пр. / За ред. О. А. Дубасенюк. — Житомир, 2004. — С. 3–14.

2. *Даниленко Л. І.* Педагогічні інновації та інноваційні педагогічні технології: сутність і структура // Нові технології навчання: Зб. наук.-метод. пр. — К., 2005. — Вип. 40. — С. 270–276.

3. *Іващук О. В.* Методичні вказівки та програмні робочі матеріали для проведення навчальної практики студентами першого курсу спеціальності «Економічна кібернетика». — Вінниця: ВФЕУ, 2009. — 15 с.

4. *Сидоренко Е. В.* Технологии создания тренинга. От замысла к результату. — С.Пб.: Речь, 2007. — 98 с.

О. В. ІВАЩУК,
канд. фіз.-мат. наук, Вінницький фінансово-економічний університет.

УДК 371

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ В УМОВАХ РІВНЕВОГО НАВЧАННЯ

Статтю присвячено висвітленню функцій, принципів, форм і методів контролю знань учнів. Особлива увага приділяється характеристиці рівнів засвоєння знань та якісній шкалі вимірювання навчальних досягнень учнів. Автори наводять приклади рівневої шкали критеріальних завдань для шкільного курсу математики. У статті висуваються вимоги до контролю знань в умовах рівневого навчання.

Functions, principles, forms and methods of control of knowledge of schoolboys are examined in the article. The special attention is spared description of levels of mastering of knowledge and the high-quality scale of measuring of educational achievements of schoolboys. Authors make an example of a level scale of criterion tasks for the school course of mathematics. In the article pulled out requirement to the control of the knowledge in the conditions of the level teaching.

Контроль і оцінювання навчальних досягнень учнів є обов'язковою складовою частиною навчання на всіх етапах вивчення теми. Контроль — це виявлення, встановлення і оцінювання знань учнів, визначення стану, рівня та якості засвоєння навчального матеріалу, виявлення успіхів у навчанні, прогалин в знаннях, уміннях і навичках. Ефективність контролю визначається ступенем реалізації його функцій: контролюючої (оцінково-вимірної), навчальної, діагностично-корегуючої, стимулюючо-мотиваційної, виховної. Так, А. М Алексюк і Ю. К. Бабанський, виокремлюючи такі ***функції*** контролю, вкладають в них наступний зміст:

- ***контролююча***, що передбачає визначення рівня досягнень окремого учня (класу, групи), виявлення рівня готовності до засвоєння нового матеріалу, що дає змогу вчителеві відповідно планувати й викладати навчальний матеріал;
- ***навчальна***, що зумовлює таку організацію оцінювання навчальних досягнень учнів, яка сприяє повторенню, вивченню, уточненню й поглибленню знань, їх систематизації, вдосконаленню навичок та умінь;
- ***діагностично-коригуюча***, що передбачає з'ясування причин труднощів, які виникають в учня під час навчання, виявлення прогалин в знаннях і уміннях та внесення в діяльність учня і педагога коректив, спрямованих на усунення цих прогалин;
- ***стимулюючо-мотиваційна***, що визначає таку організацію оцінювання навчальних досягнень учнів, яка стимулює бажання покращати свої результати, розвиває почуття відповідальності, сприяє змагальності учнів, формує позитивні мотиви навчання;
- ***виховна,*** що полягає у формуванні вміння відповідально і зосереджено працювати, застосовувати прийоми контролю і самоконтролю, сприяє розвитку працелюбності, активності, акуратності та інших позитивних рис особистості [2, 1].

Реалізація цих функцій залежить від дотримання основних принципів та чітко визначених критеріїв.

Для забезпечення ефективності контроль повинен базуватись на таких принципах:

- ***науковість*** — організація контролю на основі наукової моделі навчання та теорії дидактичних вимірювань;
- ***технологічність*** — спрямованість контролю на чітко визначені, діагностично задані цілі, організація контролю на основі заздалегідь розроблених перевірних матеріалів, використання методів, прийомів, засобів, які сприяють швидкому та ефективному його здійсненню;
- ***систематичність*** — регулярність проведення контролю на всіх етапах навчання, поєднання його з іншими сторонами навчальної діяльності учнів;
- ***раціональність*** — деяке поєднання методів контролю для досягнення його цілей;
- ***всебічність*** — охоплення контролем кожної теми, розділу, забезпечення перевірки теоретичних знань і практичних навичок і вмінь;
- ***індивідуальність*** — вибір стилю та форми перевірки й оцінки знань, навичок та вмінь;
- ***диференційованість*** — обов'язковість контролю в усіх учнів базового рівня та за досягненням початкового рівня в учнів, що відстають у навчанні [6].

До основних ***форм*** організації перевірки знань, навичок і вмінь, окрім самоконтролю, належать індивідуальна та фронтальна перевірки [1, 2]. ***Індивідуальну*** перевірку спрямовано до конкретного учня, і вона має на меті з'ясувати рівень засвоєння ним певних знань, навичок та умінь. ***Фронтальну*** перевірку спрямовано на з'ясування рівня засвоєння учнями програмного матеріалу за порівняно короткий термін.

Для реалізації цих форм організації перевірки використовують різноманітні методи контролю. ***Методи*** контролю знань розуміють як завдання, що передбачають визначення дій учнів, спрямованих на виявлення як окремих показників засвоєння навчального матеріалу з математики, так і кінцевих результатів навчання. Методи контролю мають на меті: спонукати учнів до систематичної роботи над навчальним матеріалом з математики; формувати в них потребу в самостійному отриманні знань; формувати суспільно значущі мотиви навчання. В дидактиці виділяють наступні методи контролю:

— методи усного контролю;
— методи письмового контролю;
— методи практичного контролю;
— дидактичні тести.

Основний вимірювальний інструмент — чотирирівнева дванадцятибальна шкала. Така шкала відповідає чотирьом технологічним етапам і основним видам діяльності на них, трьом ступеням оволодіння змістом теми на кожному з етапів. Основними засобами вимірювання є завдання, що відповідають кожному з дванадцяти ступенів засвоєння теми.

Основними видами контролю є: *поточний (оперативний) контроль*, який здійснюється при розв'язанні навчальних задач; *етапний (рубіжний) контроль*, функціями якого є встановлення ступеня засвоєння кожним учнем змісту теми на етапі вивчення і на основі цього коригування його діяльності на наступному етапі; *підсумковий тематичний (атестаційний) контроль*, функцією якого є встановлення кінцевих результатів вивчення теми.

Основні вимоги до контролю та оцінювання: *відкритість контролю* — ознайомлення учнів на початковому етапі з основними рівневими вимогами до засвоєння теоретичного і практичного змісту у вигляді систем критеріальних завдань; *повнота рівневого контролю* — охоплення перевірочними завданнями всіх основних рівневих видів діяльності, умінь і навичок учнів; *простота способу перевірки*, доступність його самоперевірці, самооцінюванню — перевірка правильності виконання завдань на основі співставлення з еталонними розв'язаннями чи відповідями та оцінка успіхів за кількістю правильно виконаних завдань.

У поточному навчанні учень за будь-яке самостійно виконане завдання може отримати поточний бал (оцінку) відповідно до його «питомої ваги» за дванадцятибальною шкалою. Етапний контроль засвоєння змісту теми здійснюється шляхом індивідуальних самостійних робіт навчального і перевірочного характеру та заключного фронтального контрольного опитування.

«У педагогічній теорії під критеріями розуміють ті якості явища, що відбивають його суттєві характеристики і саме тому підлягають оцінці» [2, 7].

З'ясуємо вимоги до шкали вимірювання рівня навчальних досягнень учнів.

Перша основна вимога, якій повинна задовольняти рівнева шкала вимірювання — це якісний опис рівня вимірювання, характеристик, ознак знань і умінь учнів на цьому рівні.

Чотирирівнева дванадцятибальна шкала, впроваджена в школах України, є еталонним уявленням про зміни і хід навчального процесу при вивченні теми. Послідовність чисел відповідає цьому ходу: кожний бал — це певна сходинка у пізнанні, результат учіння. Процес вивчення теми розглядається як розчленований на чотири послідовні, якісно відмінні етапи. Кожному етапу відповідає рівень навчальних досягнень — сукупність основних результатів. Шкала може ефективно використовуватись як при поточному, проміжному, тематичному, так і при підсумковому контролі.

Характеристикою ж рівня засвоєння знань повинні виступати ті види діяльності, які учень здатний виконувати в результаті навчання на певному етапі. Відповідно до діяльнісного підходу — це завдання і задачі, які повинні вміти розв'язувати учні в результаті навчання. Дії, завдання і задачі, які здатен виконувати і розв'язувати учень в результаті навчання, називають критеріальними. Підставою для застосування терміна «критеріальне завдання» є те, що успішне розв'язання таких завдань виступає в якості критерію досягнення цілей навчання (зрозуміло, що останні адекватно представлені в системі критеріальних задач). В таблиці 1 наведено приклад рівневої шкали критеріальних завдань для курсу математики.

Одним із принципів забезпечення ефективного контролю є його організація на основі певної моделі навчання. За основу моделі навчання, в якій ми будемо застосовувати тестовий контроль, візьмемо класичну модель рівневого навчання, побудовану на ідейних засадах видатного чеського педагога Я. А. Коменського [3; 4].

Таблиця 1

Шкала рівневих критеріальних завдань

Бал	**Результати.** *Критеріальні типи завдань і задач*
	Початковий рівень
1	Початкове усвідомлення — впізнавання *Завдання на безпосередній вибір, зазначення предметів.*
2	Початкове осмислення — розпізнавання *Завдання на операційний вибір, зазначення предметів.*
3	Елементарні уміння *Завдання на називання.* *Завдання з короткою відповіддю (на доповнення).* *Завдання на виконання операційно нескладних дій за елементами теорії з найпростішими типами об'єктів.* *Завдання на виконання елементарних дій в спрощених умовах.*
	Середній рівень
4	Відтворення елементів теорії базового змісту — означень, теорем, аксіом. Базові навички *Завдання на відтворення означень, теорем, правил, формул з наведенням прикладів.* *Завдання на виконання дії за елементом теорії з простими і нескладними об'єктами вивчення.*
5	Базові уміння *Задача зі схемою підведення під поняття плюс виведення наслідку або навпаки.* *Завдання зі схемою: алгоритм розпізнавання плюс алгоритм перетворення або навпаки.*
6	Уміння застосовувати базовий зміст в основних типових ситуаціях *Нескладні прикладні задачі.* *Задачі з використанням родового поняття та видової ознаки* *Задачі на основні зв'язки теми з іншими темами (перенос на раніше вивчені об'єкти).*

Продовження табл. 1

Бал	**Результати.** *Критеріальні типи завдань і задач*
	Достатній рівень
7	Відтворення доведень теорем базового змісту теми. Уміння застосовувати базовий зміст в стандартних ситуаціях підвищеного ступеня складності *Завдання на відтворення доведень теорем.* *Операційно ускладнені основні алгоритмічні задачі.* *Ускладнені задачі середнього рівня.* *Задачі, що розв'язуються на конкретизації загального правила встановлення порядку виконання дій.*
8	Уміння застосовувати базовий зміст в дещо змінених ситуаціях на основі нескладних міркувань *Задачі редуктивного виду, які на основі нескладних міркувань зводяться до розв'язання стандартного виду.* *Задачі на розпізнавання об'єктів в дещо змінених ситуаціях.*
9	Уміння застосовувати базовий зміст в нових ситуаціях *Задачі конструктивного типу, спосіб розв'язання яких конструюється на основі нескладних аналітико-синтетичних міркувань.* *Задачі-теореми, що розвивають, поглиблюють зміст і які доводять на основі методів, прийомів, використаних при доведенні теорем базового змісту.* *Задачі на перенесення знань.*
	Високий рівень
10	Відтворення теорем і доведень теорем повного змісту теми. Уміння застосовувати повний зміст теми в стандартних ситуаціях *Завдання на відтворення теорем і доведення теорем.* *Алгоритмічні задачі високого ступеня складності (алгоритмічні дії з найбільш складними типами об'єктів вивчення).* *Типові задачі високого ступеня складності.* *Задачі із значним числом дій, що розв'язують на основі конкретизації загального правила встановлення порядку дій.* *Стандартні задачі на застосування поглибленого змісту.*
11	Уміння застосовувати повний зміст в змінених проблемних ситуаціях *Проблемні задачі, що розв'язують на основі логічних міркувань і які приводять до встановлення нових знань або способів розв'язань задач.*
12	Уміння застосовувати зміст теми в нестандартних ситуаціях *Завдання на відтворення теорем, доведення теорем, розв'язання задач, засвоєних самоосвітою.* *Нестандартні задачі по відношенню до змісту теми, які розв'язують на основі здогаду, творчих процедур, евристики.*

Теоретична основа даного методу складається з двох основних компонентів: ***змістового*** та ***організаційно-методичного***.

У змістовому компоненті важливо виділити, що основною структурною одиницею змісту є навчальна тема. Кожна тема складається з базового і поглибленого змісту.

Зміст кожної теми формують у відповідності до принципів повноти, цілісності, теоретичності, практичності, фундаментальності, диференційованості та міцності; він повинен містити всі необхідні елементи для повноцінного, ґрунтовного вивчення теми [5, 21].

Повний зміст теми складається з базового, поглибленого і допоміжного.

Базовий зміст включає:

— базові елементи теорії — означення, аксіоми, теореми, доведення, які необхідні для практичного застосування теорії і достатні для навчання логічним способам здобування нових знань;

— базові навички — алгоритмічні дії за елементами теорії, виконання яких доводять до автоматизованого;

— базові уміння — основні системи дій за елементами теорії, виконання яких доводять до рівня готовності усвідомлено застосовувати їх при розв'язанні різних задач.

Поглиблений зміст включає елементи теорії та способи розв'язання задач — результати продуктивного застосування базового змісту в різних ситуаціях.

В організаційно-методичному компоненті найважливішим елементом є виділення основних етапів вивчення теми та основних результатів.

Основні етапи:

Початковий етап (теорія, аналіз) — початкове розуміння базового змісту: сприймання, усвідомлення елементів базового змісту, формування початкових елементарних умінь.

Середній етап (практика, синтез) — практичне оволодіння базовим змістом: формування базових навичок і вмінь та вмінь застосовувати базовий зміст в основних типових, прикладних ситуаціях.

Головний етап (застосування, міркування) — логічне оволодіння базовим змістом: відтворення доведень теорем, застосування базового змісту, розвиток, поглиблення теми.

Заключний етап (застосування, розмірковування) — логічне, творче оволодіння повним змістом: відтворення доведень теорем повного змісту і його застосування в різних ситуаціях.

Основні результати поетапного вивчення тем.

1) Початковий рівень: відтворення і розуміння предметного змісту термінів, що позначають об'єкти вивчення, їх частини, елементи, види; розуміння алгоритмічного змісту теоретичних положень; початкове розуміння доведень.

2) Середній рівень: відтворення елементів теорії базового змісту (означення теорем), базових навичок і умінь та застосування базового змісту в основних типових ситуаціях.

3) Достатній рівень: відтворення базової системи теоретичних знань, доведень теорем і її застосування в стандартних і змінених ситуаціях на основі нескладних аналітико-синтетичних міркувань.

4) Високий рівень: відтворення повної системи знань і її застосування в різних ситуаціях (стандартних високого ступеня складності, проблемних, нестандартних).

Щодо організаційного компонента, то основними вимогами до процесу навчання є: індивідуалізація, варіативність учіння, раціональне поєднання фронтальних, індивідуальних та групових форм навчання. Розглянемо їх сутність. Так, індивідуалізація та варіативність навчання передбачають:

— виділення часу на вивчення теми, враховуючи його доступність для оволодіння учнями з середнім рівнем розвитку на достатньому рівні, з рівнем розвитку вище від середнього — на високому, з низьким рівнем — на середньому;

— орієнтація технології на варіативне оволодіння учнями змістом теми залежно від зони активного розвитку (завдань, які учні можуть самостійно виконувати на основі початкового розуміння теми) та зони найближчого розвитку (завдань, які учні можуть виконувати самостійно з незначною допомогою вчителя);

— організація додаткового повторного початкового вивчення теми з учнями, які відстають у розвитку, а за необхідності і з учнями з низьким рівнем розвитку;

— спонукання учнів з рівнем розвитку вище від середнього до випереджального виконання рівневих завдань;

— диференціація змісту особистої самостійної практики на уроках, відтворення і застосування знань.

Раціональне поєднання фронтальних, індивідуальних і групових форм навчання має задовольняти таким вимогам:

— початкове вивчення теорії, усвідомлення, осмислення знань, дій, способів дій здійснюється переважно через фронтальне навчання;

— вироблення, закріплення навичок, умінь здійснюється переважно через самостійну практику або групову форму навчання;

— повідомлення учнями, які випереджально виконують рівневі завдання, їх розв'язання іншим учням;

— дотримання на етапах відтворення і застосування теорії часового відношення 1:1 між фронтальним способом навчання та індивідуальною самостійною практикою.

Підсумовуючи, слід відзначити, що контроль знань в умовах рівневого навчання має спиратися на дидактичні принципи: повноти, цілісності, теоретичності, практичності, фундаментальності, диференційованості та міцності; повинен раціонально поєднувати фронтальні, індивідуальні і групові форми навчання та передбачати індивідуалізацію і варіативність навчання для повноцінного, ґрунтовного вивчення теми; дотримуватися якісної шкали вимірювання навчальних досягнень учнів.

Література

1. *Гаук М.* Збірник рівневих завдань з математики для поточного оцінювання і тематичного контролю. 5 клас / М. Гаук, Л. Кондратьєва. — Тернопіль : Підручники та посібники, 2003. — 272 с.
2. Діагностичний комплект для проведення моніторингових досліджень базової математичної підготовки учнів 4—11 класів / [Афанасьєва О. М., Бродський Я. С. та ін.] ; за ред. О. М. Афанасьєва. — Тернопіль : Навч. кн. — Богдан, 2003. — 136 с.
3. *Капіносов А. М.* Основи технології рівневого навчання математики / А. М. Капіносов. — Кам'янець-Подільський: Абетка, 2001. — 92 с.
4. *Капіносов А. М.* Тематичне поетапне рівневе вивчення математики в основній школі / А. М. Капіносов. — Кривий Ріг: Вид. дім, 2005. — 112 с.
5. *Лошнова О. Б.* Уровневая дифференциация обучения / О. Б. Лошнова. — М., 1994.
6. *Спок Б.* Про застосування тестування у школі: з історії / Б. Спок // Шлях освіти. — 1997. — № 2. — С. 30—34.

І. В. ЛОВ'ЯНОВА,
канд. пед. наук, доцент кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету,

А. М. КАПІНОСОВ,
канд. пед. наук, старший викладач кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету.

УДК 377

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДОВУЗІВСЬКОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ З АЛГЕБРИ В ПОЛЬЩІ ТА УКРАЇНІ

Здійснено порівняльний аналіз розділу «Алгебра» у програмах довузівської підготовки з математики для українських і польських шкіл.

Completed a comparative analysis of the section algebra programs Preparatory Mathematics of Ukrainian and Polish schools.

Вивчення математики та фізики в сучасних умовах є важливою складовою освітньої підготовки молодої людини.

Посилення уваги суспільства до шкільної фізико-математичної освіти виявляється у розумінні її необхідності для всіх учнів; прагненні включати загальноосвітні курси математики до навчальних планів всіх рівнів освіти; диференціації фізико-математичної підготовки учнів старшої школи (тепер 10—11 класи, з 2010 року — 10—12 класи) [1].

Освітні системи багатьох країн, зокрема вітчизняна освіта, зазнають суттєвих змін: змінюються пріоритети, структура і зміст освіти, вводяться нові стандарти, формуються нові системи оцінювання результатів навчання. Особливого значення набуває проблема забезпечення якості освіти як одного з найважливіших комплексних показників її стану.

Головним джерелом цих змін є соціально-економічні процеси. Створення інформаційного суспільства і, відповідно, нових цінностей, процесів глобалізації та інтеграції формують нові вимоги до особистості, необхідність адаптації, соціалізації та інтеграції особистості в нових умовах. Освіта взагалі і математична, зокрема, має відповідати цим реаліям.

Відправною точкою при оновленні шкільної освіти є визнання розвитку і саморозвитку особистості головною метою навчання в школі. Чинна педагогічна система в цілому орієнтована на навченість, і це закладено в засоби навчання, у свідомість людей, які здійснюють або організовують навчання. Таким чином, існує протиріччя між соціальним замовленням суспільства і реальним станом справ в освіті взагалі, в математичній, зокрема [2].

Україна має підстави пишатися своїми науковими школами, своїми видатними математиками й фізиками, які зробили значний внесок у світову науку. Але впродовж останніх років дедалі частіше з'являються тривожні або навіть загрозливі тенденції.

Погіршення якості викладання фізики та математики в середній і вищій школах, скорочення і навіть зникнення курсу фундаментальної фізики в технічних університетах значною мірою призвели до втрати суспільного престижу цих основоположних наук. Це може мати згубні наслідки для інноваційного розвитку країни, врешті-решт і для національної безпеки України [1].

Однією з головних цілей оновлення змісту освіти в Україні є створення умов для усунення цього протиріччя. Це є завданням на тривалий історичний період. Завданням першого етапу оновлення освіти є модернізація її змісту за наявних конкретних умов. Системне проектування модернізації змісту освіти є одним із найважливіших завдань цього етапу [2].

Проаналізуємо українську і польську програми вивчення математики в середній школі на основі їх порівняння [3; 4].

Програма курсу математики в школі визначена метою викладання предмета та завданнями щодо покращання стану фізико-математичної освіти в Україні [2].

Згідно з програмою математики для польської середньої школи метою курсу є:

1) формування навичок оперування найпростішими абстрактними об'єктами: числами, змінними, їх виразами, числовими та нечисловими множинами, а також функціями;

2) формування умінь побудови математичних моделей для ситуацій з повсякденного життя та їх використання для вирішення практичних завдань;

3) розвиток математичного мислення учнів;

4) розвиток здатності до самостійного вдосконалення математичних знань.

Відповідно до мети курсу сформульовано завдання школи, які полягають у досягненні цілей навчання. А саме:

1) розвиток навичок чіткого формулювання думки в усній і письмовій формі;

2) формування геометричної уяви та мислення геометричними образами і поняттями;

3) удосконалення представлення і оперування даними у різних формах (символічній, графічній, геометричній);

4) вироблення навичок щодо використання сучасних технічних засобів у розв'язанні математичних задач.

Щодо відмінностей польської та української програм. Насамперед, слід зауважити, що вагоме місце у польській програмі відведено основам математики. Зокрема, у розділі «Числа і їх множини» більше уваги приділено множинам, діям з множинами; у числових множинах повніше вивчаються натуральні, цілі, раціональні, ірраціональні та дійсні числа. Вводиться поняття комплексних чисел. Розглядаються зліченні та незліченні множини; питання представлення дійсних чисел десятковими дробами. Більш ґрунтовно вивчаються властивості дійсних чисел і, зокрема, питання щільності множини дійсних чисел, точності наближення дійсного числа та модуля дійсного числа.

У польській програмі значна увага надається вивченню операцій з множинами. Їм передує розгляд елементів математичної логіки. Програма передбачає ознайомлення учнів з основними логічними операціями, а саме: логічним «і» (кон'юнкцією), логічним «або» (диз'юнкцією), логічним запереченням «не». Звертається увага на математичний зміст понять загальності та існування «для кожного» та «існує». Роз'яснюються поняття логічного способу зв'язку (імплікації) та логічної еквівалентності. На основі логічних операцій у досить повному обсязі вивчаються властивості операцій з множинами: об'єднання і перетину.

Детально розглядаються множини на числовій осі та операції з ними. Зокрема, вводиться поняття околу точки числової осі, яке потім використовується в позначенні границі функції в точці.

Польська програма передбачає ознайомлення з теоретичною арифметикою. Розглядаються питання простих і складених чисел, розклад числа на прості множники, сумірних і несумірних відрізків. Акцентується увага на можливості точного представлення ірраціональних чисел раціональними та представлення дійсного числа скінченним десятковим дробом у розрядній сітці комп'ютера.

Значно повніше, порівняно з українською, у польській програмі передбачено вивчення елементів аналітичної геометрії. У розділі векторної алгебри введено поняття лінійних операцій з векторами і скалярного добутку векторів. Достатньо повно вивчаються умови колінеарності і перпендикулярності векторів, визначення кута між векторами. Зазначимо, що вимоги програми векторної алгебри приблизно відповідають вимогам української вузівської програми для технічних вищих навчальних закладів.

Польська програма з математики передбачає достатньо повне вивчення аналітичної геометрії прямих ліній і площин. Зокрема, введено поняття загального рівняння прямої, рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом та їх взаємного розміщення (перпендикулярності, паралельності, кута між ними). Програма передбачає розв'язання задач про відстань від точки до площини.

Вивчення ліній другого порядку, аналогічно як і в українській школі, обмежується колом. Хоча польська програма, на відміну від української, передбачає визначення рівняння дотичної до кола.

Основною ж відмінністю між досліджуваними програмами у вивченні прямої на площині є елементи лінійного програмування, передбачені польською програмою.

Порівнюючи польську і українську програми з алгебри слід відмітити, що українська програма, на відміну від польської, передбачає детальніше вивчення логарифмічних, показникових і тригонометричних нерівностей та їх систем.

Обидві програми, і польська, і українська, включають елементи теорії ймовірностей і математичної статистики. Стосовно цього розділу, як позитив польської програми, слід відмітити більш ґрунтовне ознайомлення з елементами комбінаторики, що є основою теорії ймовірностей.

Польська програма передбачає вивчення формул для підрахунку числа упорядкованих і неупорядкованих вибірок з поверненням та без повернення зі скінченноелементної множини.

Українська і польська програми приблизно в однаковому обсязі включають питання основ математичного аналізу, а саме: поняття елементарних функцій, їх властивостей і графіків, перетворення графіків.

У порівнянні з польською програмою українська ставить більш складні завдання при вивченні вступу у математичний аналіз. Повніше і ширше висвітлює поняття границі функції в точці, неперервності функції в точці та на відрізку, розв'язання задач про найбільше і найменше значення, які мають велике практичне значення. Українська програма з математики передбачає не тільки ознайомлення учнів з елементами диференціального інтегрального числення, а також з основами диференціальних рівнянь. Зокрема, вивчаються питання опису з допомогою диференціальних рівнянь механічних коливань та радіоактивного розпаду. Знайомство з початками диференціальних рівнянь дає змогу на сучасному рівні описувати інерційні процеси та будувати математичні моделі найпростіших явищ у фізиці, хімії.

Література

1. Виступ міністра освіти і науки України Івана Вакарчука на нараді «Сучасна фізико-математична освіта і наука: тенденції та перспективи» 30 жовтня 2008 року, м. Київ. — Режим доступу: http://ostriv.in.ua/index.php?option=com_content&task=view&id=7104&Itemid=1426&ft=0

2. *Бродський Я., Павлов О.* Шляхи оновлення змісту шкільної математичної освіти // Математика в школі. — 2008. — № 1. — С. 24—29.

3. Програма з математики для 5—12 класів загальноосвітньої школи (рівень стандарту). — К.; Ірпінь: Перун, 2005.

4. Podstawa programowa matematyki dla liceum i technikum (zakres podstawowy) podpisana przez Ministra Edukacji Narodowej 23 sierpnia 2007 roku.

А. В. КАПЛУН,
канд. пед. наук, доцент Тернопільського вищого професійного училища ресторанного сервісу і торгівлі.

УДК 377.36:33:004

ПРОБЛЕМА ФОРМУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ В НАУКОВІЙ ЛІТЕРАТУРІ

У статті обґрунтовано зміст понять «компетенція», «компетентність», «інформаційна компетентність», «формування інформаційної компетентності», з'ясовано характерні ознаки та структуру інформаційної компетентності фахівця комерційного коледжу.

In the article grounded maintenance of concepts «competense», «competence», «informative competence», «forming of informative competence» characteristic signs and structure of informative competence of specialist of commercial college are found out.

У філософській, соціологічній, психолого-педагогічній, методичній літературі проблема формування інформаційної компетентності активно досліджується. Розглянемо основні поняття, а саме: «компетенція», «компетентність», «інформаційна компетентність», «формування інформаційної компетентності в процесі навчання природничо-математичних дисциплін», які є базовими для нашого дослідження.

Слово «компетенція» (від лат. competia — досягати, відповідати, підходити) та спільнокореневі «компетентний», «компетентність» введено в науковий обіг вітчизняної педагогіки в 60-х роках XX століття відповідно до проблем реформування не лише освіти, а й різних сфер діяльності особистості.

У словнику російської мови (уклад. Т. Ф. Єфремова) можна знайти визначення терміну «компетенція» як область знань або коло питань, з яких хто-небудь добре обізнаний; коло повноважень або прав якогось органу чи посадової особи [11]. «Компетентний — це той, що володіє ґрунтовними знаннями, добре обізнаний в певних галузях, знавець своєї справи, має певний досвід [5, 516].

Тлуачний словник іншомовних слів (уклад. Є. І. Мазніченко) розкриває поняття «компетентний» як «той, що володіє компетенцією — низкою повноважень певного закладу, особи або рядом справ, питань, що підпорядковані чиємусь веденню».

У тлумачному словнику російської мови за редакцією В. І. Даля поняття «компетентний» тлумачиться як той, що може мати право судити про щось, тобто визнаний [20, 127].

Тлумачний словник російської мови за редакцією С. І. Ожегова тлумачить слово «компетентний» як той, що володіє компетенцією, або знаючий, обізнаний, авторитетний у деякій діяльності [11, 371].

Словник української мови за редакцією В. Т. Бусел визначає, що компетентний — це такий працівник, який має достатні знання в якій-небудь галузі, який з чим-небудь добре обізнаний, тямущий, володіє знаннями, кваліфікований, має певні повноваження, повноправний, повновладний [1, 728].

Такі вчені, як В. А. Дьомін, Ю. М. Жуков, В. І. Містечкін, Р. В. Чурбаєв, користуються досить широкою кількістю трактувань сутності положення «компетентність», що безпосередньо стосується й певної професійної діяльності [3].

Сучасні психолого-педагогічні дослідження формування інформаційної компетентності студентів зумовлюють такі твердження: компетентність є адекватною організацією особистості в різних галузях життєдіяльності, з-поміж яких чільне місце посідає професійна підготовка студентів у вищих навчальних закладах України різних рівнів акредитації.

Російський вчений-дидакт А. В. Хуторський вважає, що поняття «компетенція» включає сукупність взаємопов'язаних якостей особистості (знань, умінь, навичок, способів діяльності) по відношенню до певного кола предметів, процесів, які необхідні для якісної і продуктивної діяльності з ними.

Останнім часом у психолого-педагогічній науці поняття «компетентність» почало використовуватися в зв'язку з дослідженнями вітчизняних і зарубіжних вчених щодо проблеми становлення і розвитку компетентності як однієї з властивостей особистості. Тому вчений В. І. Містечкін відзначає, що компетентність — це поняття більш глибоке і змістовне, ніж компетенція, воно повинно підкреслювати рівень кваліфікації у певній професійній діяльності.

Вчений В. М. Шепель у визначення компетентності також включає знання, уміння, досвід, теоретико-прикладну підготовленість до застосування знань. Педагог П. В. Симонов вважає компетентністю майбутнього спеціаліста потенційну готовність вирішувати певні професійні завдання. Вівін де Ландшеєр компетентність розуміє як поглиблені знання, здатність до адекватного виконання завдань або діяльності, тобто компетентність — це володіння особистістю відповідною компетенцією, що включає її власне відношення до предмета своєї діяльності.

Деякі вчені розглядають компетентність як рівень освіченості особистості, що характеризується вмінням володіти засобами пізнавальної або практичної діяльності на базі певних теоретичних знань. Так, Б. С. Гершунський, аналізуючи інформаційну компетентність (рівень, професійної освіти), включає її до основних результативних компонентів освіти.

Отже, професійна компетентність наповнена змістовим та особистісно значущим компонентом. Ми вважаємо, що майбутній компетентний фахівець не тільки повинен розуміти сутність професійної проблеми, а й володіти способами її практичного вирішення.

У науковій літературі існує розмежування категорій «компетентність» і «компетенція»; поняття ж «компетентний» випливає безпосередньо з «компетенції». Визначення поняття «компетентність» подібні в багатьох наукових джерелах, натомість як для поняття «компетенції» не існує єдиного тлумачення. Зазвичай компетенцію визначають як знання й уміння в певних галузях науки, культури, техніки; а компетентність — як реальну демонстрацію цих знань і відповідних умінь в конкретній діяльності [1, 158].

Над визначенням єдиного трактування поняття «компетентність» працювали І. Н. Агапов, К. Г. Батоциренова, В. С. Безрукова, А. К. Білоусова, Б. С. Гершунський, Е. Н. Гусинський, В. А. Дьомін, Ю. М. Жуков, І. М. Кондаков, Дж. Куллахан, В. І. Містечкін, Ж. Перре, Л. А. Петровська, Л. Д. Столяренко, Р. В. Чурбаєв, С. Е. Шишов, Г. Г. Халаш та ін.

Українські вчені узагальнили декілька підходів до визначення цих понять:

— обидва терміни вживаються як синоніми (Т. А. Гудкова, С. А. Дружилова, Е. Ф. Зеєр, А. Л. Миролюбов та ін.);

— компетенції вважають складниками компетентності (К. О. Махмурян, І. І. Пересторонiна, В. В. Софронова та ін.);

— компетентність — досвідченість у певній галузі, а компетенція — коло повноважень певної особи (В. В. Кальней, С. Є. Шишов).

Отже, компетентність означає інституціональне поняття, що визначає статус якої-небудь особи, і тому є поняттям функціональним.

Компетентність характеризує особистість як суб'єкта спеціалізованої діяльності в системі суспільного розподілу праці з урахуванням рівня розвитку його здібностей. Це здатність виносити кваліфіковані судження, приймати адекватні й відповідальні рішення в проблемних ситуаціях, планувати і здійснювати дії, що призводять до раціонального та успішного досягнення поставлених цілей певної професійної діяльності.

Бути компетентним фахівцем означає здобути найвищий рівень майстерності в певній сфері діяльності не стільки в розумінні виконання, скільки в розумінні організації та системного розуміння всіх завдань, пов'язаних з діяльністю, вмінням поставити завдання та організовувати їх розв'язання [9, 135].

Компетентність — це багаторівневе утворення з компонентами когнітивного, експресивного та інтерактивного характеру, складна система внутрішніх психологічних складових властивостей фахівця, що включають в себе й певні його професійні здібності.

Н. В. Кузьміна, А. К. Маркова, М. А. Чошонов та інші вчені розглядають компетентність як мету освіти, але мету формалізовану. З одного боку, компетенції — більш дрібний розподіл узагальнених цілей освіти і більш творчий рівень конкретизації, з іншого боку, компетенції — діяльнісна складова професійної освіти, що допомагає проявитися знанням, умінням і навичкам у новій ситуації, тобто є більш високим рівнем узагальнення знань, умінь, навичок. На основі вищесказаного нами визначено поняття *компетентність як здатність особистості до ефективного виконання діяльності, що передбачає володіння новою інформацією, новими знаннями, уможливлює їх використання щодо успішного розв'язання професійних завдань відповідно до певної професійної спрямованості навчання.*

У структурному ланцюжку результативності освіти дослідники виділяють професійну компетентність, що «...визначається головним чином рівнем власне професійної освіти» і розуміється як «інтегральна якість особистості, що поєднує спеціальні знання й уміння, індивідуальні здібності, відношення до праці й соціального оточення».

Вчені М. І. Забродський, М. Л. Кричевський, М. Н. Розов та інші професійну компетентність вирізняють не лише базовими знаннями, вміннями, навичками, а й доцільними ціннісними орієнтаціями фахівця, адекватною мотивацією його діяльності, високим рівнем комунікації. Отже, це загальна особистісна професійна культура фахівця, що стимулює здатність кожного до перманентного розвитку творчого потенціалу особистості.

Зарубіжні вчені (Д. Джулі, Ж. Паре, Дж. Равен та інші) вважають, що соціально значущі особистісні якості сприяють швидкій адаптації майбутнього фахівця, тобто його компетентності.

Аналіз філософської, педагогічної, психологічної, соціологічної літератури показав неоднозначність підходів до визначення поняття «інформаційна компетентність».

В. Л. Акуленко, М. Г. Дзугоєва, О. Б. Зайцева, А. Л. Семенов, Н. Ю. Таїрова, О. М. Толстих та інші вчені поняття «інформаційна компетентність» трактують як складну індивідуально-психологічну освіту на основі інтеграції теоретичних знань, практичних умінь в області інноваційних технологій та певного набору особистісних якостей.

В. А. Хутмахер, А. В. Зав'ялова, А. Л. Семенов та інші вважають, що це нова письменність, до складу якої входять уміння людини самостійно здійснювати обробку інформації, схвалювати принципово нове рішення у непередбачених ситуаціях з використанням технологічних засобів.

На думку А. В. Зав'ялова, інформаційна компетентність — це знання, уміння, навички і здатність їх застосовувати при розв'язанні задач в засобах нових інформаційних технологій.

В. В. Недбай визначає інформаційну компетентність як здатність знаходити, оцінювати, використовувати і повідомляти інформацію в усіх її видах і поданнях.

Ряд американських дослідників визначає інформаційну компетентність як поєднання комп'ютерної грамотності, вміння працювати з традиційними видами інформації у бібліотеці, володіння технологічною грамотністю, етикою, критичним сприйняттям та навичками комунікації.

Найбільш сучасним визначенням інформаційної компетентності є визначення, зроблене в політехнічному інституті м. Помона, США. Так, вчений Кетлін Дюн вважає, що інформаційну компетентність в загальному вигляді можна розуміти як сукупність компетенцій, пов'язаних з пошуком і аналізом інформації в традиційній друкованій формі, рівень комп'ютерної компетенції, компетенції критичного сприйняття і аналізу, комунікативної компетенції, медіа-компетенції (як уміння працювати з різними формами подання інформації).

Але інформаційна компетентність — це не лише культура роботи з інформаційними ресурсами. Інформаційна компетентність фахівця вказує на рівень оволодіння інформацією і вміння використовувати її в освітньому процесі: це знання і використання раціональних методів пошуку і зберігання інформації в сучасних інформаційних масивах, володіння навичками роботи з різними видами комп'ютерної інформації; уміння подати інформацію в системі Інтернет; уміння організувати самостійну роботу за допомогою Інтернет-технологій тощо.

На думку О. А. Кизик, поняття «інформаційна компетентність» включає культуру пошуку нової інформації, вміння читати й сприймати інформацію, розуміння особливостей сучасних текстових повідомлень і необхідність аналізу досліджуваного напрямку; усвідомлення того, що будь-який пошук інформації є засобом одержання нових знань (на противагу тому, що це спосіб усунення інформаційного дефіциту, який виникає при розв'язуванні проблемних завдань; уміння перетворювати інформацію за допомогою інформаційних (комп'ютерних) технологій; володіння інтелектуальними нормалізованими методиками (поаспектного аналізу текстів, конвент-аналізу, класифікаційного і кластерного аналізу тощо); розуміння важливості міжособистісного професійного спілкування для успішності будь-якої трудової діяльності; прагнення до підвищення рівня комунікаційної компетентності; готовність не тільки одержувати, а й віддавати знання; уміння знаходити партнерів за спільною діяльністю для телекомунікаційних каналів зв'язку; уміння чітко і доказово подавати результати власної діяльності; знання норм, що регламентують використання інтелектуальної власності тощо [8].

У дослідженнях Н. Х. Насирова пропонується розглядати інформаційну компетентність як мотивацію, потребу та інтерес до нових знань, умінь і навичок у галузі технічних, програмових засобів інформації; сукупність світоглядних знань, які відображають сучасне інформаційне суспільство; знання інформативних пошуків основ пізнавальної діяльності; способи і дії, що визначають операційно-діяльнісну основу інформаційної компетентності; досвід роботи в сфері програмового забезпечення та технічних ресурсів певної інформації; досвід відносин «людина-комп'ютер» тощо.

Психологічні дослідження М. С. Лук'янової, А. К. Маркової, В. В. Стрельнікової доводять, що інформаційна компетентність — це мотивація, потреби та інтерес до нових знань, умінь і навичок, які відображають систему сучасного інформаційного суспільства, володіння способами і діями, що визначають операційну основу пошуково-пізнавальної діяльності в сфері програмного забезпечення.

Крім того, М. М. Забродський вважає, що в професійній компетентності обов'язковими є мотиваційна, пізнавальна і діагностична складові. Саме вони визначають рівень професійної обізнаності, майстерності, сформованості особистісних якостей у майбутнього фахівця комерційного коледжу.

Це забезпечує творчий показник результативності й позитивної взаємодії на різних рівнях: суб'єкт — об'єктному, об'єкт — суб'єктному; об'єкт — суб'єкт-об'єктному.

Отже, інформаційна компетентність — це інтегративне утворення, що характеризує здатність особистості до визначення своїх інформаційних потреб, а саме пошуку інформації та ефективної роботи з нею в усіх її формах та проявах як в традиційній, друкованій формі, так і в електронній; здатність до роботи з комп'ютерною технікою та телекомунікаційними технологіями, вміння застосовувати їх у професійній діяльності та повсякденному житті. Інформаційна компетентність є сукупністю трьох складових: інформаційної (здатність ефективної роботи з інформацією в усіх формах її подання); комп'ютерної або комп'ютерно-технологічної (уміння та навички щодо роботи з сучасними комп'ютерними засобами та програмним забезпеченням); застосування (здатність застосовувати сучасні інформаційні та комп'ютерні технології в роботі з інформацією та розв'язанні різноманітних професійних завдань).

А. О. Вербицький визначає інформаційну компетентність через систему усвідомлення знань, бо щоб бути теоретично й практично компетентним, необхідно зробити подвійний перехід від знань до думки, а від думки — до вчинку, дії, перехід від інформації до її використання опосередковується думкою, що і робить цю інформацію знанням.

На сьогоднішній день існують два визначення інформаційної компетентності особистості. З одного боку, інформаційна компетентність — це компетентність індивіда в роботі з інформацією, а з іншого, — це комп'ютерна компетентність, тобто уміння працювати з комп'ютером та інформаційними технологіями. На основі аналізу психолого-педагогічної літератури сформульовано поняття «інформаційна компетентність».

Інформаційною компетентністю будемо розуміти складну інтегративну якість особистості, що сприяє готовності здійснювати складну інформаційну діяльність щодо збереження, обробки, передачі та відображення певної інформації за допомогою комп'ютерної техніки.

Первинним для визначення структурного і змістового наповнення системи формування інформаційної компетентності є вивчення діяльності фахівця в певній галузі. Діяльність є джерелом відомостей, відповідно до яких будуть визначені конкретні компетенції. Поряд із діяльністю виникає необхідність у вивченні особистості як носія функцій певної професії. Особистісні якості визначають успішність багатьох видів діяльності, а відсутність тих чи інших якостей може бути перешкодою для отримання визначеної спеціальності.

У даний час успіх процесу формування інформаційної компетентності будь-якого фахівця залежить від загальноосвітньої комп'ютерної підготовки і гарантій високої професійної мобільності в умовах жорсткої конкуренції на ринку праці. Студент повинен прагнути до навчання вміння використовувати комп'ютер саме в своїй професійній сфері і володіти високим рівнем психологічної та функціональної готовності до успішного застосування нових інформаційних технологій, тобто мова йде про інформаційну компетентність як про необхідну і достатньо значущу частину професійної компетентності.

Процес формування інформаційної компетентності, який пов'язаний з умінням використовувати інформаційні ресурси суспільства, можна подати у вигляді такої послідовності: постановка задачі, формування предметної області інтересів, усвідомлення потреб в інформації і формулювання запиту, пошук інформації в документах та інших інформаційних джерелах, аналіз і синтез інформації, співвідношення її з обсягом накопичених знань і соціальним досвідом індивіда, оцінка, критичне і творче переосмислення інформації, практичне використання остаточного результату діяльності.

У дослідженнях вчених І. Ф. Ісаєва, Р. В. Чурбаєва поняття «формування інформаційної компетентності» розглядається як інтегративна професійна якість особистості, яка, з одного боку, віддзеркалює її здатність до визначення інформаційної потреби, пошуку інформації та ефективної роботи з нею в усіх її формах (традиційній, друкованій та електронній тощо); а з іншого, як здатності її до роботи з комп'ютерною технікою та телекомунікаційними технологіями і застосування їх у професійній діяльності та повсякденному житті. Доведено, що формування інформаційної компетентності забезпечує інформаційно-пошукову, комп'ютерно-технологічну, процесуально-діяльнісну функції у професійній діяльності [70, 11].

Формування інформаційної компетентності полягає у виявленні сукупностей компетентностей, які дозволяють працювати з інформацією, вирішувати всі проблеми та розв'язувати всі задачі, що виникають у фахівця як під час професійної діяльності, так і в повсякденному житті, а також — використовувати інформаційні, комп'ютерні та телекомунікаційні технології при здійсненні інформаційних процесів пошуку, обробки та використання інформації; вміти вибирати оптимальні засоби інформаційних, комп'ютерних та телекомунікаційних технологій для розв'язання задач; розуміти економічні, соціальні, юридичні аспекти використання інформації; критично оцінювати і відбирати інформацію; бути готовим до перетворення отриманої інформації у професійні знання; постійно слідкувати за новинками в галузі своєї професійної діяльності і бути готовим до вивчення нових засобів у сфері інформаційних технологій [10].

Отже, формування інформаційної компетентності студентів комерційного коледжу в процесі навчання природничо-математичних дисциплін — це складний багатофункціональний інтегрований процес, спрямований на усвідомлення студентами мотивів, потреб інформаційної діяльності, на поєднання теоретичної та практичної складових змісту освіти, введення у зміст курсів природничо-математичних дисциплін інформаційної діяльності, яка забезпечує збереження, обробку, передачу та відображення певної інформації за допомогою комп'ютерної техніки.

Формування інформаційної компетентності майбутнього фахівця припускає наступні етапи вирішення завдань: визначення цілей діяльності, тобто постановка завдання; цілеспрямоване застосування знань, умінь і навичок у їх строгій відповідності до проблеми, поставленої в даному завданні, тобто визначення вхідної і вихідної інформації, вибір алгоритму, побудова моделі, формалізація; опис розв'язання задачі; інтерпретація проміжних і остаточних результатів [6].

Отже, формування інформаційної компетентності включає в себе:

— оволодіння базовими знаннями в області інформатики (мати уявлення про інформацію, способи її обробки, зберігання, передачі, про основні інформаційні процеси в різних системах, знати способи надання інформації в електронно-обчислювальній машині);

— оволодіння уявленнями про будову комп'ютера (вміти вибирати і завантажувати програмне забезпечення в оперативну пам'ять, орієнтуватися в різних операційних системах);

— оволодіння основною термінологією, що стосується використання інформаційних технологій в процесі навчання природничо-математичних дисциплін;

— оволодіння текстовими, графічними і музичними редакторами, електронними таблицями і базами даних знань, іншим прикладним програмним забезпеченням;

— розгляд можливостей програмних продуктів з метою виявлення доцільності їх використання в навчально-пізнавальній діяльності [40].

З огляду на вищевикладені положення, процес формування інформаційної компетентності студентів в процесі навчання природничо-математичних дисциплін повинен включати в себе основні дидактичні принципи: доцільність; посильність; активність; науковість і доступність; свідомість і активність; наочність; оптимальне поєднання діяльності викладача і студента; розвиваюче навчання; оптимальне поєднання словесних, наочних і практичних методів; творча активність.

Американська дослідниця С. В. Дойл дає визначення, яке повно розкриває вміння і навички, що входять до інформаційної компетентності. На її думку, інформаційно компетентною є така людина, яка розуміє, що достовірна і повна інформація — основа для правильних рішень; розуміє потребу в інформації; формулює інформаційні запити; ідентифікує потенційні джерела інформації; розвиває успішні пошукові стратегії; має доступ до джерел інформації, зокрема, за допомогою комп'ютерних технологій; оцінює інформацію й організовує її для практичного використання; інтегрує нову інформацію до знань, що вже в неї є; використовує інформацію для здійснення критичного аналізу та розв'язання проблем.

Формування інформаційної компетентності студентів у процесі навчання природничо-математичних дисциплін здійснюється за допомогою цілого ряду факторів, одним з яких є зміст освіти, що містить в собі не тільки перелік навчальних предметів, але й професійні навички та вміння, що формуються в процесі вивчення предметів.

Поняття «інформаційна компетентність» припускає наявність у людини сучасного суспільства сформованої звички одержувати знання з використанням можливостей сучасних комп'ютерних технологій так само, як ми сьогодні одержуємо їх через книги. У такий спосіб сукупність стійких навичок постійного ефективного застосування досягнень цивілізації, а саме виховання мотивації і навичок застосування інформаційних технологій, визначається як інформаційна компетентність.

Тому викладачі та науковці все частіше звертаються до питання використання інформаційних технологій під час вивчення природничо-математичних дисциплін у вищих навчальних закладах. Такі технології допомагають запобігти тиску та примусу в навчанні, викликають інтерес до предметів, підвищують результативність навчального процесу. Наразі застосування інформаційних технологій під час вивчення природничо-математичних дисциплін для контролю знань підтвердило свою результативність і сприяння підвищенню ефективності навчального процесу.

Ми вважаємо, що при формуванні інформаційної компетентності під час навчання природничо-математичних дисциплін доцільно дотримуватися таких правил: послідовність виконання дій на комп'ютерній техніці повинна бути чітко визначена в інструкції, а природничо-математичний зміст матеріалу — доступний розумінню студентів; завдання повинні вміщувати достатню кількість інформації; дидактичний матеріал, який використовується в завданнях, повинен мати професійне спрямування, бути цікавим і доцільним; необхідно забезпечити об'єктивний контроль за досягненням результатів; завдання варто чередувати за складністю матеріалу, що до них входить, або характером розумових дій, а за змістом матеріалу вони мають бути пізнавальними.

Н. І. Лісова пропонує розглядати процес формування інформаційної компетентності як єдність таких складових: досвідченість, авторитетність, уповноваженість особи, яка має право приймати рішення щодо визначеного кола питань, здатність добре розумітися у своїй справі, розвивати, перебудовувати свою діяльність або створювати принципово нову.

Процес формування інформаційної компетентності студентів при вивченні природничо-математичних дисциплін, у першу чергу, залежить від специфіки навчального закладу. Однією з головних вимог до майбутніх фахівців економічної галузі є глибокі фахові знання, тобто випускники комерційних коледжів повинні мати великий обсяг знань з природничо-математичних дисциплін, вміти поповнювати, розвивати, творчо застосовувати їх у своїй професійній діяльності.

Сучасні стандарти вищої освіти для всіх спеціальностей передбачають вивчення студентами курсу інформатики. При цьому, як зазначає Н. В. Морзе, предметом навчальної дисципліни «Інформатика» є наукові факти, основні поняття і положення стосовно сутності інформації та інформаційних процесів, принципи, методи і засоби пошуку, збирання, опрацювання, подання, передавання різноманітних повідомлень і даних та управління інформаційними процесами.

Однак практика стверджує, що шляхом оволодіння лише цією навчальною дисципліною неможливо підготувати студентів до якісного використання комп'ютерної техніки у майбутній діяльності, тому необхідно впроваджувати синтезуючі системи навчання, коли знання та уміння в сфері інформатики стануть запорукою успішного опанування інших навчальних дисциплін та сприятимуть формуванню інформаційної компетентності фахівців, вмінь та навичок використання комп'ютерів при розв'язуванні професійних завдань.

Дослідження вітчизняних і зарубіжних вчених показали, що використання комп'ютерної техніки сприяє розвитку мислення людини, раціональної та ефективної організації її праці, розвитку навичок і умінь щодо опрацювання різноманітних матеріалів. За допомогою комп'ютера можна широко (й гарантовано якісно) виконувати дії, що потребують у ручному режимі значних зусиль (обчислення точні й наближені, побудова графічних образів тощо), що створює умови для інтелектуалізації навчальної праці, розвитку творчих здібностей студентів-користувачів комп'ютерної техніки, формуванню в них інформаційної, алгоритмічної і професійної компетентності.

Література

1. Великий тлумачний словник української мови / Уклад. В. Т. Бусел. — К.; Ірпінь: Перун, 2003. — 925 с.

2. *Даль В. И.* Толковый словарь живого русского языка: В 4 т. Т. 3. — М.: ТЕРРА, 1995. — 470 с.

3. *Демин В. А.* Профессиональная компетентность специалиста: понятия и виды // Мониторинг образовательного процесса. — 2000. — № 4. — С. 35.

4. *Джинчарадзе Н. Г.* Інформаційна культура особи: формування та тенденції розвитку (соціально-філософський аналіз): Дис. ... д-ра філос. наук: 09.00.03 / Київ. ун-т ім. Т. Шевченка. — К., 1997. — 452 с.

5. *Дубасенюк О. А.* Формування особистості старшокласника засобами проектної діяльності в умовах ко-

легіуму // Вісник Житомирського державного університету ім. І. Франка. — 2006. — № 29. — С. 30—33.
6. *Жалдак М. І.* Проблема інформатизації навчального процесу в школі і вузі // Сучасна інформаційна технологія в навчальному процесі: Зб. наук. пр. / КДПІ імені М. П. Драгоманова. — К., 1991. — С. 3—16.
7. *Исаев И. Ф.* Сущность и основные тенденции формирования профессиональной компетентности // Материалы Всероссийской научно-практический конференции «Профессионально-педагогическая культура: история, теория, технология». — Белгород, 1996. — С. 8—13.
8. *Краевский В. В., Хуторский А. В.* Моделирование в педагогическом исследовании // Введение в научное исследование по педагогике / Под ред. В. И. Журавлева. — М., 1988. — С. 12—31.
9. *Кремень В.* Інформаційно-комунікаційні технології в освіті і формування інформаційного суспільства // Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах. — 2006. — № 6. — С. 4—8.
10. *Овчарук О. В.* Компетентності як ключ до оновлення змісту освіти. Стратегія реформування освіти в Україні: Рекомендації з освітньої політики. — К.: «К. І. С.», 2003. — С. 13—43.
11. *Ожегов С. И., Шведова Н. Ю.* Толковый словарь русского языка. — М.: Азбуковик, 1999. — 944 с.

Я. В. КАРЛІНСЬКА,
аспірантка кафедри педагогіки Житомирського державного університету ім. Івана Франка.

УДК [373.3:510.2+510.2](075.2)

ЛОГІКА І РОЗВИТОК ТВОРЧИХ ЗДІБНОСТЕЙ УЧНІВ

В статті розглядаються питання обґрунтування вивчення логіки як окремої дисципліни в системі шкільної освіти; роль і значення логіки для формування всебічно розвинутої особистості. Подається стислий огляд методики викладання логіки для учнів 4 класів за посібником «Логічна мозаїка».

This article considers the reasons of learning logic as a separate subject in the School Educational System. In also describes part and significance of logic to form a developed personality. The article also offers a brief summary of logic teaching methods that can be applied for teaching 4-grade students using the Work Book «Logical Mosaic».

XXI століття висуває до освіти нові вимоги, які зумовлюють потребу у вихованні випускника, здатного знаходити і опрацьовувати інформацію, перетворюючи знання на інструмент пізнання інших видів діяльності; завжди зрозуміло викладати свої думки; вміти аргументувати власну точку зору і переконувати в її правильності, або висловлювати своє ставлення (позитивне чи негативне) до інших поглядів під час дискусії; знаходити найкоротші й правильні шляхи виправлення помилок. Такому випускнику необхідно мати не тільки багато знань з основ наук, але й володіти такими надзвичайно важливими видами розумової діяльності, як аналіз і синтез, абстрагування і узагальнення, вміння доводити і спростовувати, приймати обґрунтовані, раціональні рішення. Основа формування згаданих якостей, безумовно, закладається в процесах вивчення шкільних дисциплін насамперед природничо-математичного циклу. Протягом усього свідомого життя людина здобуває нові знання. Одне з найважливіших завдань, яке ставить перед собою кожна людина — навчитись мислити правильно (або логічно). Логічне мислення характеризується визначеністю і чіткістю, несуперечливістю і послідовністю, обґрунтованістю і доказовістю. Ці риси притаманні логічному мисленню, оскільки вони відображають корінні властивості самої дійсності.

Розширення світогляду, поглиблення фактичних знань, ознайомлення з різноманітними видами міркувань, безперечно, сприяють розвитку мислення взагалі. Високоосвічена, розвинена людина швидше помітить помилки в міркуванні навіть тоді, коли вони не стосуються безпосередньо її спеціальності, звичних для неї щоденних занять. Через це вивчення різноманітних наук має надзвичайно велике значення.

Кожна наука тією чи іншою мірою передбачає міркування. Навіть описові предмети, такі як географія, біологія, анатомія, астрономія, не можуть обійтися без міркувань. Важливе значення для розвитку мислення людини має вивчення мови, як рідної, так і іноземної. Щоб правильно застосовувати граматичні правила, недостатньо вивчити їх, запам'ятати — тут потрібно вміти міркувати. Прагнення уникнути граматичних помилок пов'язується з необхідністю уникати логічних помилок. Знання іноземних мов ще більшою мірою сприяє розвитку мислення. Переклад іноземного тексту на рідну мову являє собою розв'язання свого роду логічних задач. Значні можливості для розвитку логічного мислення забезпечує вивчення літератури. Аналіз художніх творів, вивчення психології і мови героїв, оцінка їх поведінки — усе це сприяє розвитку мислення. Дуже важливим є вміння писати твори. Результат написання залежить не лише від знання фактичного матеріалу, а й від того, наскільки послідовно його автор зможе довести основну думку свого твору, повно і чітко обґрунтувати кожний пункт складеного ним плану цього твору. Для розвитку абстрактного мислення велику користь приносить вивчення природничих наук, наприклад, хімії, в якій для дослідження причин різних явищ, вивчення атомів і молекул, недостатньо безпосереднього спостереження, і через це особливого значення набувають теоретичні міркування; фізики, де постійно виводяться одні положення з інших, що формує навички правильного мислення. Ефективною практикою для розвитку логічного мислення є розв'язування фізичних задач. Наукою, яка найбільшою мірою сприяє розвитку правильного мислення, вважають математику. Справді, тут на перший план висувається не стільки засвоєння окремих положень, скільки їх обґрунтування, доведення. І це стосується не лише геометрії, а й усіх інших розділів математики.

Зауважимо, що розвиток логічного мислення залежить не лише від вивчення окремих наук, а й від методики їх вивчення, тобто не тільки від того, що ми вчимо, а й від того, як вчимо. Якщо в основу покладено метод заучування окремих положень, то таке вивчення предмета незначною мірою розвиває мислення. Механічне заучування не лише окремих фактів, але й цілих міркувань нітрохи не змінює справи. Навіть математику можна вивчати так, що її вивчення не сприятиме розвитку мислення: якщо учень механічно запам'ятовує положення й цілі доведення (міркування), то при розв'язуванні задач замість того, щоб міркувати самостійно, він просто повторює зазубрені приклади міркувань. Така методика вивчення предмета не тільки не розвиває, а й часто, навпаки, притупляє мислення. Коли на перший план висувається розвиток мислення, вивчення всіх наук може відіграти велику роль у розвитку навичок правильного мислення і цим самим зменшити кількість логічних помилок у міркуваннях.

Необхідно зазначити, що навіть при ідеальній методиці вивчення окремої науки навички правильного мислення виробляються лише в таких операціях мислення, які в цій науці найчастіше зустрічаються. Вивчення різних наук розвиває різні сторони мислення. Спосіб виведення одних положень з інших, характерний для математики (в процесі доведення теорем, розв'язування рівнянь тощо), майже не зустрічається в таких науках, як географія і біологія. Водночас у географії та біології застосовуються такі способи знаходження первинних зв'язків між явищами, які не характерні для математики. Тому спеціаліст в галузі певної науки може не вміти правильно міркувати щодо питань, які належать іншим галузям, навіть якщо знає всі необхідні для цього факти. Отже, вивчення окремих наук не дає можливості переборювати логічні помилки в міркуваннях, а дає лише практичні навички тих чи інших міркувань. Якщо учень не може визначити, правильне дане міркування чи ні, йому не допоможуть ні зосереджена увага, ні відсутність будь-яких стресових ситуацій, ні знання фактичного матеріалу.

Логічне знання є необхідним в кожному шкільному курсі. Тому, як ні одна інша шкільна дисципліна, формальна логіка спирається на міжпредметні зв'язки через використання різноманітних понять широкого кола навчальних предметів, суджень, умовиводів, доведень та спростувань, а також на особливості розвитку логічного мислення учнів в процесі навчання різних дисциплін. Дослідження спеціалістів в галузі середньої освіти свідчать про доцільність запровадження окремої дисципліни, основною метою якої було б спеціальне формування загальнологічних знань і умінь, причому викладання цієї дисципліни пропонується починати вже з молодших класів. Логіка, яка складає фундамент всієї освіти, повинна вивчатися якомога раніше. З цією метою Міністерством освіти і науки України рекомендовано програму курсу «Логіка» для учнів 2—7-х класів загальноосвітньої школи.

У Рішельєвському ліцеї завжди велика увага приділялась розвитку логічного мислення учнів. Працюючи з учнями 7—8-х класів, які починають навчання в ліцеї, вчителі бачили, які труднощі виникають в них. Тому в школі вихідного дня «Перші кроки», в якій учні 6—7-х класів готуються до вступу в Рішельєвський ліцей, було запропоновано проведення уроків з логіки. Такі уроки суттєво допомагають вчителеві розвинути в учнів здатність до здійснення розумових операцій, пошуково-перетворюючий стиль мислення, сформувати мотивацію для досягнення успіху, необхідну кожному як у навчанні, так і в житті. Діти, які вивчають логіку, відрізняються від своїх однолітків вищим рівнем розвитку культури мовлення — висловлюють думки чітко, ясно, точно, послідовно і переконливо; в них сформовані такі якості мислення, як самостійність, аналітичність, критичність, гнучкість, допитливість. Крім того, уроки логіки сприяли кращому засвоєнню, перш за все математики та інших навчальних дисциплін природничо-математичного циклу.

Вивчаючи програму з логіки, запропоновану Міністерством освіти і науки України, та аналізуючи досвід роботи в школі «Перші кроки», ми разом з вчителем початкових класів, вчителем-методистом Л. Ф. Шостак розробили уроки з логіки для 4-го класу. Робочі зошити «Логічна мозаїка» для учнів 4-го класу — це продовження розробок уроків з логіки для 1—3-х класів та початок роботи над уроками з логіки для 5—7-х класів. Викладання курсу з логіки за допомогою зошитів «Логічна мозаїка» орієнтовано на розвиток основних аспектів розумової діяльності і має на меті стимулювати мислення дітей, навчати їх основним операціям і прийомам мислення, закладати основи логічного, комбінаторного та операційного мислення, розвивати кмітливість, просторову уяву, пам'ять та увагу. Вивчаючи логіку в 4-му класі, діти продовжують знайомитися з поняттями, судженнями (просте судження та його структура, складні судження), з'ясовують логічний зміст сполучників «і», «або», «якщо ..., то». На прикладах їм пояснюються необхідні та достатні умови, розглядаються складні судження зі словами «необхідно», «достатньо», «необхідно і достатньо». У розділі «Умовиводи» діти навчаються аналізувати міркування, відрізняти правильні міркування від неправильних, знаходити в неправильних міркуваннях помилки та виправляти їх. У посібнику до розв'язання пропонується багато прикладів, в яких застосовуються алгоритми. Особливо це стосується рівнянь, при розв'язуванні яких в учнів 4-х класів виникають великі труднощі. Обраний метод розв'язання рівнянь спирається не на правила, а на відношення між частинами і цілим, яке представлено у вигляді графічної схеми (алгоритма). Діти продовжують вивчати множини, їх графічне зображення за допомогою кругів Ейлера, знайомляться з підмножиною. Розглядаються основні операції над множинами та вводяться символи: $\in$ (належить), $\notin$ (не належить), $\subset$ (підмножина), $\cap$ (перетин множин), $\cup$ (об'єднання множин). Пропонується багато задач на знаходження кількості елементів у перетині та об'єднанні множин. Вивчення цієї теми дає змогу зрозуміти логічний зв'язок із завданнями з математики, навчитися розв'язувати задачі логічного змісту, які необхідні для забезпечення наступності у вивченні математики та інформатики. Взагалі, в зошиті представлено різноманітні задачі як за змістом, так і за методами розв'язання. Наприклад, є задачі на припущення та метод вилучення, задачі, які розв'язуються з кінця, які розв'язуються майже без обчислень, задачі на знаходження додатків, якщо відоме значення суми, комбінаторні задачі, задачі на зважування, переливання та рух. Задачі розв'язуються за допомогою відрізків, які допомагають учням наочно побачити як умову задачі, так і спосіб розв'язання. При цьому формуються основні прийоми роботи над текстом задачі, способи моделювання відносин, представлених в умовах задач у вигляді різних схем, малюнків. Це дозволяє дітям вибрати раціональний спосіб розв'язання задач. Завдання, що потребують нестандартного підходу до розв'язання, представлені в розділі «Цікава математика». Розв'язування таких завдань розвиває в учнів продуктивне мислення, спостережливість, вміння логічно мислити, намагання переборювати труднощі, при цьому учні переживають радість пошуку та здогадки. Мета завдань розділу «Дроби» — розширення поняття числа та забезпечення засвоєння поняття дробу як результат ділення цілого на рівні частини і взяття кількох таких частин. Формування поняття дробу дається через систему завдань з широким використанням наочності. Розглядаються основні дії з дробами та задачі (знаходження дробу від числа та числа за дробом). Для розвитку у дітей просторових уявлень, пошуково-перетворюючого стилю мислення в посібнику подано задачі «на розрізання», «одним розчерком», завдання на моделювання, на пошуки нового конструкторського рішення. Таким чином, є надія, що вивчення логіки за даними посібниками допоможе кожній дитині творчо підходити до опанування основ усіх шкільних дисциплін і бути більш підготовленою до вивчення математики в 5-му класі.

Значення вивчення логіки в школі полягає в тому, що:

— вона дисциплінує мислення, звільняє його від неясностей і плутанини;

— навчаючи правильному мисленню, вона тим самим підвищує загальну культуру мислення. Учень, який знає форми і закони мислення, використовує їх свідомо і запобігає помилкам у мисленні;

— формулюючи закони і правила, яким підлягають наші думки в процесі міркування, логіка навчає методам здобуття вивідного знання, методам відшукування нових результатів, навчає свідомо використовувати поняття, судження, умовиводи, які є скарбницею знань людства.

В результаті суспільство отримає особистість, яка здатна до саморозвитку і самоосвіти, вміє використовувати набуті знання і вміння для творчого розв'язання проблем, критично мислити, опрацьовувати різноманітну інформацію, прагне змінити на краще своє життя і життя своєї країни.

Література

1. Програма курсу «Логіка» для 2—7-х класів загальноосвітньої школи.
2. *Середа В. Ю.* Вчись мислити логічно. — К.: Рад. шк., 1989. — 175 с.
3. *Ивин А. А.* Искусство правильно мыслить. — М.: Просвещение, 1990. — 240 с.
4. *Зегет В.* Элементарная логика. — М.: Высш. шк., 1985. — 256 с.
5. *Шостак Л. Ф., Кореновська О. Г.* Логічна мозаїка. — О., 2009. — 72 с.

О. Г. КОРЕНОВСЬКА,
вчитель вищої категорії, Рішельєвський ліцей при Одеському національному університеті ім. І. І. Мечникова.

УДК 378+51

МАТЕМАТИКА У ТЕХНІЧНОМУ ВУЗІ: ЗМІСТ І ФОРМА

Обґрунтовано необхідність урахування фахової орієнтації в процесі математичної підготовки інженерів та спеціалістів природничих напрямків, основна мета якої — оволодіння математичними методами. Пропонується привести у відповідність назву та напрямок освітньої діяльності кафедр, що забезпечують математичну підготовку спеціалістів інженерних і природничих напрямків.

The necessity of taking into account the vocational orientation in the mathematical training of engineers and specialists in natural areas, whose main goal — develop the mathematical methods. Proposed to reconcile the name and direction of educational activities of the departments that provide mathematical training of specialists in engineering and natural areas.

Незалежно від роду занять кожна людина свідомо чи підсвідомо використовує математичні знання впродовж усього життя. Успішна діяльність висококваліфікованого спеціаліста неможлива сьогодні без використання математичних методів. Відчутне зростання темпів використання комп'ютерної техніки у багатьох сферах діяльності людини підсилює роль математики та її методів і потребує їх свідомого і коректного застосування. Ці обставини спонукають до визнання ролі математики та її методів як особливо важливих у підготовці спеціалістів природничих, інженерних, економічних та інших профілів. Математика — основа їх фундаментальної підготовки. Математичні методи потрібні сьогодні також фахівцям гуманітарного напрямку у зв'язку з використанням при проведенні наукових досліджень інформаційних та комп'ютерних методів.

Роль і місце математики в сучасному суспільстві забезпечує особливі взаємовідносини з освітою, котра як дуже динамічна, повинна постійно враховувати реальну ситуацію у виробництві та технологіях і, випереджаючи нинішні потреби, орієнтуватися на перспективу. До цих завдань в Україні додаються ще труднощі із працевлаштуванням випускників за спеціальністю в умовах нестабільної роботи промислових підприємств, їх подрібнення на невеликі фірми та організації. Бакалавр на основі загальноосвітньої підготовки повинен бути готовим до набуття спеціалізації. І коли освіта бакалавра в цілому є основою для набуття конкретної спеціалізації, то його фізико-математична підготовка повинна слугувати трампліном для розвитку та вдосконалення. Це покладає особливу відповідальність на фундаментальну підготовку бакалавра взагалі та математичну, зокрема.

Вивченню математики повинна передувати чітка концепція: що, в якому обсязі та з якою метою вивчати? Відповіді на ці питання лежать в основі наповнення змісту навчального предмета математики. Послідовно чіткий виклад математики потребує багато зусиль, часу і є, очевидно, неможливим і недоцільним для технічного ВУЗу. Можливо єдиним виходом з цієї ситуації є зміщення акцентів з «математики за суттю» на «відповідні математичні методи». Причому самі методи слід планувати з урахуванням конкретного напрямку підготовки фахівця. Однак розділити математику і математичні методи в навчальному процесі недоцільно і неможливо. Такі спроби неминуче призвели б до втрат як у розумінні ідей і принципів, так і у володінні методами. Так, при вивченні інтеграла неможливо обмежитися його поняттям, властивостями, умовами існування, питаннями, які становлять принципову основу інтегрального числення. Необхідно, а для інженера і не менш важливо, оволодіти методами інтегрування. Існує чимало питань в математиці, для яких просто неможливо провести межу між принципом і методом. Такими є усі конструктивні доведення, тобто доведення, які містять метод розв'язання відповідної задачі. Для прикладу згадаємо теорему про існування оберненої матриці, теорему Больцано-Коші для неперервної на відрізку функції, теорему Банаха про стискуючі відображення. Ці міркування дають підстави для висновку про пріоритет математичних методів в процесі вивчення математики під час підготовки спеціалістів інженерних профілів.

За курсом математики в технічних ВУЗах України та країн СНД традиційно закріпилася назва «Вища математика». Однак вона не визначає і не відображає змісту цього курсу. «Вища математика» може означати всю математику, що не входить до програми довузівської підготовки. Для прикладу згадаємо відомі курси математики В. І. Смірнова [1] — енциклопедичне видання, що за винятком алгебраїчних структур та імовірнісно-статистичних методів охоплює усі розділи математики; посібник з математики для вищих технічних навчальних закладів Н. С. Піскунова [2]. «Дифференциальное и интегральное исчисление» містить розділи «Диференціальні рівняння», «Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики», які не є частиною диференціального та інтегрального числення. Подібна спроба охопити сучасну математику в єдиному курсі зроблена у двотомному курсі одного з найвидатніших математиків другої половини минулого століття Лорана Шварца [3]. За задумом автора його курс повинен відповідати потребам сучасних фізиків та інженерів, яким у сукупності потрібні неосяжні математичні пізнання. І хоча формально для вивчення книг Шварца не вимагається попередніх знань, вони насправді доступні лише тим, хто володіє достатньою математичною культурою та попередньою підготовкою. Автор сам зауважує, що, незважаючи на відносно невеликий обсяг (1400 с.), курс є надто великим, він містить багато теорем з достатньо повними доведеннями. Курс Шварца відкриває можливість для факультативного вивчення того чи іншого розділу у відповідності до власних смаків та рекомендацій викладача. Автор вважає, що студенту достатньо вивчити лише найбільш типові та повчальні для нього доведення. Під назвою «Математичний аналіз» курс Шварца насправді містить на дуже високому рівні виклад сучасної теорії і математичних методів аналізу (класичного та функціонального), диференціальних рівнянь, функцій дійсних і комплексних змінних.

Ніде не визначено коло питань, які включає курс «Вища математика». При аналізі відомих підручників «Вища математика» природно виникають запитання, чому, як правило, «звичайні диференціальні рівняння» відносять до вищої математики, а диференціальні рівняння у часткових похідних — ні? Чому «Вища математика» не включає математичної логіки, теорії графів, лінійного програмування, тобто розділів математики, які, як правило, вивчаються у технічних вузах? А якою математикою є випадкові процеси, методи оптимізації, теорія груп, які також у певному обсязі вивчаються майбутніми інженерами деяких профілів? Не менш цікаво, чому інші загальноосвітні дисципліни, вивчення яких продовжується після школи у вузах, як «Фізика», «Хімія», «Інформатика», не отримали приставки «вища»?

Умовним на сьогодні залишається також поділ математики на елементарну і вищу. Не існує чіткої межі між математикою, що вивчається в школі та у вузах. У шкільній програмі з математики знаходимо тепер елементи диференціального і інтегрального числення, аналітичної геометрії і навіть теорії імовірностей та математичної статистики. Питання розділу довузівської і вузівської програм з математики стає особливо актуальним у зв'язку з переходом школи на дванадцятирічну систему навчання. Тоді програма з математики, орієнтована на здобуття у подальшому природничо-інженерних спеціальностей, мала б бути базовим курсом основ математики, достатнім для вивчення у вузі потрібних математичних методів. Звичайно, ця задача не відразу виявиться посильною для школи, хоча б через відсутність відповідної літератури. Базовий курс математики залишиться необхідним у вузі і після переходу школи на дванадцятирічний термін навчання.

Зміст математики, як допоміжної дисципліни, повинен бути прив'язаним до профілю підготовки і, у зв'язку з їх різноманітністю, суттєво залежати від фахової скерованості навчального процесу. Необхідна різноманітність змісту курсів математики безперечно повинна відображатися різноманітністю форми і, зокрема, назви. У світовій та європейській практиці акцент ставиться саме на математичні методи та фахову скерованість курсу математики. Для прикладу назвемо загальновідомих авторів: Р. Курант, Д. Гільберт [4], Г. Джеффріс, Б. Свірлс [5], Е. Маделунґ [6], Т. Т. Сунґ [7], Г. Корн, Т. Корн [8].

Вивчення математичних методів повинно починатися з їх основ — базового курсу математики, зміст якого був би однаковим, наприклад для інженерів різних профілів, і продовжуватися спеціальною математичною підготовкою, орієнтованою на фахові напрямки. Тут доречно буде згадати двотомний україномовний підручник за редакцією Г. Л. Кулініча [9], перший том якого містить виклад основних розділів математики, тобто основ математичних методів: лінійну алгебру, аналітичну геометрію, диференціальне та інтегральне числення функцій однієї і декількох змінних, а другий — спеціальні, тобто саме математичні методи: функціональні ряди, звичайні диференціальні рівняння, рівняння математичної фізики, теорії ймовірностей та математичної статистики.

Усвідомлюючи, що спеціалістам різних фахових напрямків потрібні не зовсім одні і ті ж розділи математики в однаковому обсязі, мусимо це відобразити і в назвах курсів. Тоді прив'язаність до фахового напрямку стала б явною, а фахова скерованість — конкретною. Це сприяло б покращанню математичної підготовки та було б стимулом до появи відповідних підручників для спеціальної математичної підготовки.

Висновки. З метою вдосконалення математичної підготовки студентів технічних вузів, узгодження її зі світовими і єропейськими нормами в освіті пропонується:

1. Розробити програму основного курсу математики та підготувати підручники для бакалаврів нематематичних спеціальностей. Наприклад, «Основний курс математики для інженерних спеціальностей», «Основний курс математики для фізиків» і т. д., або «Основи математичних методів для інженерів», «Основи математичних методів фізики» і т. д.

2. Розробити програми математичних методів та підготувати підручники і навчальні посібники для магістрів, орієнтованих на конкретні фахові напрямки: інженерні спеціальності (механічні, електрорадіотехнічні, комп'ютерних наук і технологій, приладобудування і т. п.), а також природничих (фізика, хімія, біологія і т. п.). Привести у відповідність зміст та назву основного математичного курсу (наприклад, «Основи математики для інженерів», або «Основи математичних методів в інженерії» і т. п.) та спеціальної математичної підготовки (наприклад, «Математичні методи експериментальної фізики», «Математичні методи для інженерів-механіків» і т. п.).

3. Відобразити напрям освітньої діяльності у назві математичних кафедр, які заперечують базову та спеціальну математичну підготовку (наприклад, «Кафедра математичних методів в інженерії», «Кафедра математичних методів в економіці» і т. п.).

4. Сприяти виданню підручників для спеціальної математичної підготовки, ілюстрованих задачами конкретного змісту.

Література

1. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 5 т. — М.: Наука: Физматгиз, 1974.

2. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: Учеб. пособие для втузов: В 2 т. — М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985.

3. *Лоран Шварц.* Анализ: В 2 т. — М.: Мир, 1972.

4. *Курант Р., Гильберт Д.* Математические методы физики: В 2 т. — М.: Мир, 1974.

5. *Джеффрис Г., Свирлс Б.* Методы математической физики: В 3 т. — М: Мир, 1970.

6. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики. — М.: Мир, 1960. — 620 с.

7. *Soong T. T.* Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers. — New York: John Wiley & Sons, Ltd, 2004. — 391 p.

8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы. — М.: Наука, 1984. — 831 с.

9. Вища математика: Підручник: У 2 кн. / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординський та ін.; За ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 2003.

В. А. КРИВЕНЬ,
доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри математичних методів в інженерії Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя.

УДК 372.851

РОЗВИТОК МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ ФІЗИКИ

Статтю присвячено короткому огляду та періодизації впровадження математичної складової у навчальні плани студентів-фізиків. Проаналізовано основні проблеми, що постають перед студентом при вивченні фізичних дисциплін крізь призму математичного апарату.

The article deals with brief observation and periodicities of promotion and development of mathematical component into the curricula of students of physics/ The main problems which appear before the students leaning of physical subjects through the mathematical components have been analyzed.

> Одна з найбільш важливих характерних рис сучасної фізики полягає в тому, що висновки, зроблені з початкових ідей, мають не лише якісний, але й кількісний характер. Для того, щоб зробити кількісні висновки, ми повинні використовувати мову математики... І якщо ми хочемо зробити висновки, які можна порівняти з результатами досліду, то нам необхідна математика як зброя дослідження.
>
> *А. Ейнштейн*

Актуальність і постановка задачі. Сучасна картина розвитку науки і техніки України стимулює до перегляду основних методичних засад навчальних програм ВНЗ фізико-математичного спрямування. Як відомо, наша держава впродовж тривалого часу була чи не прикладом у генеруванні «мозкового фонду науковців». Праці наших співвітчизників стоять на одній з вищих сходинок всесвітніх досягнень; ними пишаються, вони є прикладом, стимулом до нових відкриттів. Однак на даний час викликає занепокоєння стан фізико-математичної підготовки майбутніх науковців та педагогів. Дана проблема лягла в основу першої за останні 50 років реформи фізико-математичної освіти. Про це свідчила Всеукраїнська нарада з питань розвитку фізико-математичної освіти «Сучасна фізико-математична освіта і наука: тенденції та перспективи», що була проведена 30 жовтня 2008 року в МОН під головуванням міністра освіти і науки І. Вакарчука. Зі слів міністра: «Погіршення викладання фізики та математики може мати згубні наслідки для інноваційного розвитку країни. Ми сформуємо План дій Міністерства, бо саме фізико-математична освіта визначає не лише якість життя людей, а й, насамперед, рівень національної безпеки країни» [12].

Здійснення нових реформ нерозумно проводити не проаналізувавши переваги та недоліки попередніх. Як показує досвід минулих років, процес формування чогось нового найчастіше проходить у конфронтації старих систем понять і нового експериментального матеріалу, в який ці системи проникли в результаті природної експансії. У даному випадку слід враховувати також вимоги Болонського процесу і зміни в структурі середньої та вищої освіти (поява різнопрофільних середніх шкіл: ліцеїв, гімназій, коледжів і т. п.), і те, що наша освітня система розвивалася відокремлено від світової, а тому несе в собі свій неповторний «колорит», свої традиції і здобутки.

У світлі вищесказаного «на перше місце висуваються вимоги щодо здатності і готовності педагога XXI століття дати особистості можливість отримати освіту необхідного рівня та глибини на будь-якому відрізку її життєдіяльності» [3, 8].

Мета даної статті — проаналізувати розвиток та становлення математичних дисциплін в педагогічних вузах для вчителя фізики та виявити ряд чинників, що зумовили теперішній стан фізико-математичної освіти в Україні.

Аналіз останніх досліджень і публікацій показав, що проблема використання міжпредметних зв'язків при викладанні математичних дисциплін загальновідома. Міжпредметні зв'язки досліджували С. М. Рибак [13], А. І. Бугайов [14, 58—69], А. В. Пьоришкін, В. Г. Розумовський, В. А. Фабрикант [15, 104—118], В. Н. Федорова, Д. М. Кирюшкін [16] та інші. Проблема психолого-педагогічних аспектів вибору форм, засобів і методів навчання, які узгоджено із загальними концепціями побудови математичних курсів у педагогічному вузі, також широко обговорюється в роботах В. А. Гусєва [17]; виявлення сутності і структури педагогічної діяльності (Ф. Н. Гоноболін [18]); обґрунтування теоретичних основ удосконалення професійної підготовки (О. А. Абдуліна [19], З. І. Слєпкань [20] та інші).

Виклад основного матеріалу. Сучасний етап розвитку освіти України висуває підвищені вимоги до професійної підготовки вчителя, який має бути «озброєний» сучасними методиками і технологіями навчання. Однією з провідних задач педагогічного процесу підготовки майбутнього вчителя фізики середньої (повної) школи є перетворення особистості студента у вчителя-професіонала, який вміє розв'язувати все розмаїття задач, пов'язаних з навчанням та вихованням школярів. Саме тому необхідно підвищувати професійну підготовку вчителя фізики, що потребує не лише впровадження нових шляхів організації навчально-виховного процесу у вищій школі (у педагогічному вузі), але й перегляду структури і змісту математичної підготовки студентів-фізиків, підняття її на вищий технологічний рівень. Інтенсифікація навчального процесу в таких випадках потребує врахування ряду факторів [6, 23].

1. Різний рівень засвоєння шкільного курсу математики та фізики студентами першого курсу вищих педагогічних навчальних закладів. Дана проблема пов'язана з мінімізацією використання математичної діяльності в шкільній фізичній освіті (на зразок західних систем) та з суттєвим зниженням інтересу до природничих дисциплін, особливо в старшій школі.

2. Наявність у студентів певних здібностей і навичок до поглибленого вивчення та засвоєння фізико-математичних дисциплін.

3. Обов'язкова диференціація матеріалів для аналізу та перевірки рівня засвоєння матеріалу як групою загалом, так і кожним студентом, зокрема.

4. Систематичне та обґрунтоване встановлення міжпредметних зв'язків між спорідненими науковими галузями.

Дані фактори становлять основу методичної системи підготовки вчителя фізики, а їх результативність та ефективність є критерієм оцінювання професійної майстерності педагога.

Міжпредметні зв'язки слід розуміти як таку єдність цілей, функцій змістовних і структурних елементів предметів, яка, будучи реалізованою в навчально-виховному процесі, сприяє узагальненню, систематизації та міцності знань, формуванню узагальнених вмінь і навичок, в кінцевому підсумку — формуванню цілісного наукового світогляду та якостей всебічно і гармонійно розвиненої особистості [4, 8].

Видатний російський вчений, історик, філософ Боніфатій Михайлович Кєдров (1903—1985) писав, що «...у розвитку природничих наук значну роль відіграли дві протилежні і, здавалося б, взаємовиключні тенденції: одна полягала в роздробленості й розгалуженості наук, їх диференціації, інша, навпаки, — у прагненні об'єднання розрізнених наук у загальну систему наукового знання, тобто в їх інтеграції... Взаємне проникнення наук відображає таким чином об'єктивну діалектику природи; воно свідчить про те, що природа у своїй основі єдина і нероздільна, являє собою єдність у багатоманітності, загальне в особливому. Жодна особлива частина природи не ізольована від решти її частин, а перебуває з ними у зв'язку, прямому чи опосередкованому, з'єднуючись тисячами тисяч ланцюжків, переходів, перетворень» [5, 47].

Характеристика математичної освіти фізика — це також питання предметної математичної підготовки: структура, обсяг, принципи, критерії, зміст матеріалу; це і питання загальнокультурної гуманітарної складової: розвиток мислення (аналіз, синтез, конкретизація); це і загальнонаукові вміння, пов'язані з математичною діяльністю: математичне забезпечення фізичних теорій, математичне моделювання.

Розглянемо в історичному аспекті розвиток математичної освіти майбутніх вчителів фізики. Перші типові навчальні плани для педагогічних інститутів з математичних дисциплін з'явилися у 1934 році. На той час в Україні існувало 4 педагогічні інститути (з 13, що діяли на теренах РСФСР) [4, 140—142]. За програмою 1934 року курс аналітичної геометрії розпочинався з вивчення методу координат на площині та в просторі. Зміст першої частини курсу визначався розв'язком основних задач на пряму і дослідженням кривих другого порядку, з геометрії — рівняннями прямої і площини, рівняннями поверхні другого порядку. Перевагу надавали координатному методу викладу матеріалу. Для зручності вивчення механіки, фізики, диференціальної геометрії координатний метод замінили векторним [4, 199].

Навчальний план 1935 року передбачав підготовку вчителя фізики та математики, причому спеціалізація починалася з 3-го курсу. На першому та другому курсах вивчалася елементарна математика (114 годин), аналітична геометрія (176 годин) та математичний аналіз (495 годин). З'явилися спеціалізовані підручники, зокрема Д. М. Синцьова, Д. А. Граве.

Згідно з навчальними планами 40-х років для студентів фізико-математичного факультету обов'язковими курсами були математичний аналіз, аналітична геометрія, проективна геометрія, вища алгебра, загальна фізика, астрономія, теоретична механіка, звичайні диференціальні рівняння, теорія ймовірності, теорія аналітичних функцій та рівняння математичної фізики. «Крім цього, студенти слухали диференціальну геометрію, теорію функцій дійсної змінної, варіаційне числення, вищу геометрію і основи геометрії, другу частину вищої алгебри, теорію чисел, історію фізики, історію математики і методику викладання фізики та математики» [4, 143].

Післявоєнні роки дещо підкоректували цілі та зміст освітянської системи. Нові навчальні плани було прийнято у 1955 році і спрямовано на те, що більшість випускників (більше 70%) піде працювати саме педагогами в середні школи [4, 144].

Саме тому розширено існуючі кваліфікації і введено нові: «математик, вчитель математики середньої школи», «фізик, вчитель фізики середньої школи» і т. д.

Продовжує друкуватися нова навчальна література. Виданий відомий п'ятитомник «Курс вищої математики» В. І. Смірнова, «Короткий курс аналітичної геометрії» М. В. Єфімова та ін.

У 50-ті роки відбулося реформування педагогічних інститутів, які до того часу називалися учительськими. Термін навчання з чотирирічного (1945—1956) перетворився на п'ятирічний з 1956 року. В програмах з математичних дисциплін було випущено питання про перетворення афінних просторів і афінних класифікацій ліній другого порядку, поняття про проективну площину і проективні координати, поняття про афінне і проективне перетворення і афінну та проективну класифікацію ліній другого порядку. Було введено нові теми — обертання твердого тіла, кути Ейлера [4, 210].

У 1956 році під впливом статті П. С. Александрова виникло питання про зближення аналітичної геометрії та лінійної алгебри [1, 12—14].

У 1959/1960 навчальному році впроваджено нові навчальні плани, які «передбачали значне збільшення годин на дисципліни, пов'язані з обчислювальною математикою і технікою, включаючи практикум на обчислювальних машинах» [4, 161].

У 1964 році затверджено новий навчальний план, в якому не лише вилучена дисципліна «Методика навчання математики», але й додані нові дисципліни — «Елементи математичної логіки і теорії множин», «Функціональний аналіз і інтегральні рівняння» [4, 163]. В плані вивчення матеріалу з математики набула широкого поширення векторна алгебра, курси основ геометрії, проективної геометрії і диференціальної геометрії об'єднано в курс вищої геометрії, в який включено новий розділ «Елементи топології замкнутих поверхонь» [4, 225].

У 70-х роках створено нові програми, в яких відбулася потужна інтеграція та реформування багатьох дисциплін. Дисципліна «Методи математичної фізики» тепер містить інтегральні рівняння, теорію функцій комплексної змінної. Дисципліну «Проективна геометрія та креслення» вилучено з навчального плану. Дисципліна «Математичний аналіз» містить теорію границь, диференціальне числення, інтегральне числення і теорію рядів. З'явилася дисципліна «Основи векторного та тензорного аналізу», яка включає розділи про скалярні, векторні та тензорні поля, а також елементи теорії поля в криволінійних системах координат. Об'єднано дисципліни «Диференціальні та інтегральні рівняння» і включено до них розділ варіаційного числення [10, 3—11].

У цих програмах добре висвітлено векторні простори та лінійні оператори, квадратичні форми. Хоча вивчення лінійних операторів та деяких інших тем ускладнює без основних означень, прикладів та властивостей відображень взагалі і взаємнооднозначних відображень, зокрема. Тому на початку курсу потрібен невеликий розділ, присвячений відображенням, про який в програмі не згадують.

З точки зору складності подальшого матеріалу здається необґрунтованим, що теорія визначників обмежується тільки визначниками другого та третього порядків.

Необхідними для формування математичного світогляду і важливими для викладання теоретичної фізики є знання хоча б основних результатів і властивостей груп, кілець та полів, зокрема поля комплексних чисел. Ці ж теми в програмі взагалі відсутні. І хоча в подальшому вони знаходять своє відображення в курсі «Математичного аналізу», проте необхідно ввести основні поняття вже в курсі «Аналітичної геометрії та лінійної алгебри».

На фоні досить високого рівня викладання лінійної алгебри та аналітичної геометрії видається значним недоліком повна відсутність у студентів-фізиків знань з теорії чисел. Освіта є недосконалою без знань про прості та взаємнопрості числа, дільники числа, ознаки подільності чисел та хоч якісь їх обґрунтування. Аналогічні питання можуть виникнути на уроці з будь-якої дисципліни, де використовується математичний апарат. Для фізиків необхідно ввести невеличкий спецкурс з теорії чисел.

У крайньому випадку потрібна хоч одна курсова робота з математики. Це особливо важливо для студентів, яких готують за двома спеціальностями: фізик-математик, фізик-інформатик та ін.

Експериментальні дослідження показують, що вчитель фізики по закінченні педагогічного вузу має слабкі практичні навички оперування математичними поняттями: похідною, інтегралом, елементарними функціями, основними поняттями теорії ймовірності, теорії матриць, тому що вони були засвоєні формально.

Математичне моделювання фізичних процесів розуміється статично, без варіативності, самостійності. У той же час зміст і обсяг математичної освіти неповністю обґрунтовані з точки зору методології і професійних вимог; перевантажені другорядним матеріалом, який не використовується в професійній діяльності вчителя фізики.

Якщо проаналізувати стан справ в математичній освіті студента-фізика, то можна виявити такі основні протиріччя:

1. Між об'єктивною цілісністю математичного блоку знань, умінь, математичних навичок та існуючою структурою математичної підготовки вчителя фізики.

2. Між можливістю моделювання фізичних явищ і процесів та формально-логічним стилем викладання математичних дисциплін, де недостатньо використовуються сучасні методи і підходи до вивчення математики [2, 25].

3. Між природним «формалізмом» математичної мови (і як наслідок — формалізмом знань) і суттю математичних об'єктів (понять, теорем, доведень і т. д.), що в процесі навчання є немаловажною проблемою.

4. Між змістом методичного забезпечення математичної освіти вчителя фізики в формі навчально-методичних комплексів (посібників, підручників, методичних настанов, програмного забезпечення і т. д.) і об'єктивною необхідністю наявності цілісної методичної системи майбутніх вчителів фізики.

5. Між орієнтацією на побудову змісту математичної освіти, виходячи з її особливостей, і необхідністю врахування психологічних аспектів сприйняття студентами-фізиками математичного змісту.

Фізика і математика як навчальні предмети, що є основою формування наукового світогляду школяра, несуть в собі потужний гуманітарний потенціал, що визначає процеси соціалізації і адаптації особистості до змін явищ оточуючого світу, процеси, що стимулюють розвиток інтелекту того, кого навчають.

На основі вищесказаного можна зробити наступні висновки:

1. Необхідно визначати і реалізовувати загальні і спеціальні принципи, що визначають напрямки математичної освіти фізика. До загальних принципів відносяться: принцип професійно-педагогічної спрямованості, принцип цілісності, принцип варіативності, принцип методологічної визначеності, принцип особистісної орієнтації. До спеціальних — принцип наочного моделювання, принцип фундаменталізму, принцип розвиваючого навчання.

2. Методична система математичної освіти вчителя фізики має бути цілісним процесом становлення особистості вчителя, що поєднує систему математичних знань, інтелектуальних та практичних умінь і навичок, досвід творчої діяльності.

3. Необхідно ввести до складу математичного аналізу варіаційне числення, теорію функцій комплексної змінної, ряди Фур'є.

Такий зміст математичної освіти майбутніх вчителів фізики включатиме: загальнотеоретичний рівень (навчальний план), рівень навчального предмета (програми), рівень навчального матеріалу (підручники, монографії, посібники, методична література), досвід творчої та емоційно-вольової діяльності. Саме він дасть позитивні результати при засвоєнні та розумінні необхідних понять і законів фізики як студентами, так і учнями, яких вони, ставши вчителями, навчатимуть.

Висновок.

Питання про дані проблеми та можливі шляхи їх вирішення неодноразово простежувалися в працях багатьох дослідників-педагогів [7—10], що свідчить про актуальність, багатогранність та невичерпність роботи над подоланням труднощів впровадження, реформування та перегляду шляхів становлення математичної складової при підготовці вчителя фізики. Як було зазначено вище, простеживши процес модернізації математичної вищої освіти на фізичних факультетах, можна узагальнити та виявити загальні тенденції подальшого розвитку освіти педагога-фізика, який володів би тим необхідним арсеналом математичних знань, умінь та навичок, що забезпечували б належне їх використання для майбутніх поколінь.

Література

1. *Александров П. С.* Постоянно обновлять содержание математических курсов // Вестник высшей школы. — 1956. — № 5. — С. 12–14.

2. *Афанасьев В. В., Смирнов Е. И.* Курс математики для естественно-научных специальностей (для физиков): цели, задачи, структура, содержание // Шестая Международная конференция «Физика в системе современного образования» (ФССО-01): Тез. докл. — Ярославль, 2001. — Т. 3. — С. 114–115.

3. *Афанасьев В. В., Смирнов Е. И.* Современные проблемы и концепции математического образования учителя физики // Ярославский педагогический вестник. — 2005. — № 13.

4. История математического образования в СССР. — К.: Наук. думка, 1975. — 383 с.

5. *Кедров Б. М.* О творчестве в науке и технике [электронный ресурс]. Режим доступа: http://nehudlit.ru/books/detail7131.html

6. *Красножон О. Б.* Система математичної підготовки майбутніх учителів фізики в умовах використання інформаційно-комунікаційних технологій: Автореф. дис.

... канд. пед. наук: 13.00.02 / Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова. — К., 2005. — 19 с.
7. *Мелехов А. П., Кадушкин В. И., Дюбуа А. Б.* Проблемы математического обеспечения курса физики в педвузе и пути их решения // Шестая Международная конф. «Физика в системе современного образования» (ФССО-01): Тез. докл. — Ярославль, 2001. — Т. 3. — С. 119—120.
8. *Милованов В. Ф., Синько Г. И.* К вопросу о преподавании математики при подготовке студентов физических специальностей // Шестая Международная конф. «Физика в системе современного образования» (ФССО-01): Тез. докл. — Ярославль, 2001. — Т. 3. — С. 120—121.
9. *Мухаметдинова С. Х.* Вводный курс высшей математики в системе подготовки учителя физики и информатики: Учеб. программа. — Красноярск: РИО КГПУ, 2000. — 38 с.
10. Некоторые теоретические и практические аспекты межпредметных связей: Сб. науч. тр. / АПН СССР. — М.: АПН СССР, 1982. — 88 с.
11. Программа по геометрии / Сост.: Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев // Программы педагогических институтов / М-во просвещения СССР. — М., 1987. — Сб. № 7. — С. 3—11.
12. Прес-реліз виступу міністра освіти І. Вакарчука від 30 жовтня 2008 року. Електронний ресурс: http://www.mon.gov.ua/ main.php?quer=newstmp/2008/31_10/2
13. *Рибак С. М.* Автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.04 / Вінниц. держ. пед. ун-т ім. М. Коцюбинського. — Вінниця, 2006. — 19 с.
14. *Бугаев А. И.* Методика преподавания физики. Теоретические основы. — М.: Просвещение, 1981. — 288 с.
15. Основы методики преподавания физики / Под ред. А. В. Перышкина, В. Г. Разумовского и В. А. Фабриканта. — М.: Просвещение, 1983. — 398 с.
16. *Федорова В. Н., Кирюшкин Д. М.* Межпредметные связи. — М.: Педагогика, 1972. — 152 с.
17. Методика навчання геометрії / В. А. Гусєв, В. В. Орлів, В. А. Панчищина та ін.; За ред. В. А. Гусєва. — М.: Вид. центр «Академія», 2004. — 368 с.
18. *Гоноболин Ф. Н.* О некоторых психических качествах личности учителя // Вопросы психологии. — 1975. — № 1; *Кузьмина Н. В.* Очерки психологии труда учителя. — Л., 1967; *Крутецкий В. Н.* Психология. — М., 1980.
19. *Абдулина О. А.* Педагогическая подготовка учителя в системе высшего педагогического образования [Текст]: для пед. спец. вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Просвещение, 1990. — 139 с.
20. *Слєпкань З. І.* Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі. — Режим доступу: www.book-ye.com/product_4193.html — 28 k.

О. В. КУПРІЯН,
старший викладач кафедри прикладної математики Міжнародного економіко-гуманітарного університету імені акад. С. Дем'янчука,

П. О. ТАДЕЄВ,
канд. фіз.-мат. наук, доцент, докторант кафедри педагогіки Київського національного університету імені Т. Г. Шевченка.

УДК 371

ТЕХНОЛОГІЯ НАВЧАННЯ ДИСЦИПЛІН ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНОГО ЦИКЛУ НА ОСНОВІ МІЖПРЕДМЕТНОГО ЗАДАЧНОГО ПІДХОДУ

В статті висвітлено створення технології навчання на основі міжпредметного задачного підходу. Автор пропонує способи залучення учнів до активної пізнавальної діяльності щодо виконання міжпредметних завдань і вправ різного рівня складності.

Technology of the education is described in article on base of the intersubject task approach. The author offers the ways of attraction pupils to active cognitive activity in the course of execution intersubject tasks and exercises of the miscellaneous level of difficulty.

Не втрачає свого значення ідея навчати учнів шляхом розв'язання задач. Невипадково в загальноосвітніх школах на розв'язання задач відводять набагато більше часу, ніж на вивчення теорії. Проте ці два види роботи повинні переплітатися й обумовлювати один одного. Так, наприклад, на уроках математики навчальний процес відбувається здебільшого від задач до теорії, а потім від теорії до задач за схемою:

ЗАДАЧІ — ТЕОРІЯ — ЗАДАЧІ

Перехід від задач до теорії характеризує проблемну ситуацію, перехід від теорії до задач характеризує застосування теорії. Методи й способи розв'язання задач визначаються як характером самих задач, так і тими знаннями й допоміжними засобами, якими учні володіють на даному етапі навчання.

У дослідженні останніх років психологи, дидакти й методисти переконливо показали, що уміння школярів розв'язувати задачі не залежить від кількості розв'язаних задач.

Виникає потреба обґрунтування дидактичних умов ефективного формування уміння розв'язувати задачі.

Найбільш значну групу навчальних дисциплін складають предмети з функцією «озброєння» учнів системою наукових знань. Саме до цієї групи належать природничі дисципліни (фізика, хімія, біологія). Цикл математично-природничих дисциплін шкільного курсу якнайбільше сприяє оволодінню соціальним досвідом та інтелектуальному розвитку особистості, оскільки, на нашу думку, зміст природничих дисциплін і характер діяльності учнів у процесі його засвоєння дає можливість учневі відчувати той нерозривний зв'язок з оточуючим світом, який знаходиться в постійному русі, безперервно змінюється як кількісно, так і якісно, а тому спонукає до розвитку й діалектичного мислення. Склад кожного навчального предмета містить в собі чотири взаємозалежних компоненти: знання про світ і про способи діяльності; способи діяльності, що втілюються в уміннях і навичках; досвід творчої діяльності, що забезпечує можливість вирішувати нові задачі; зміст емоційно-ціннісних відносин особистості. Наголошуючи на ролі особистості в її становленні й саморозвитку, С. Е. Трубачова зазначає, що зміст шкільної освіти має бути однією з педагогічних умов, яка сприяє розкриттю індивідуальних пізнавальних можливостей, визначенню інтересів і нахилів, розвитку здібностей для забезпечення необхідного рівня освіченості та соціалізації особистості. Тож у доборі змісту освіти має забезпечуватися «перенесення стратегічних пріоритетів із знань і умінь на розвиток особистісних якостей школяра», щоб забезпечити його розвиток на сучасному рівні [11, 33–35]. «Серед природничих наук математика грає особливу роль. Математичний апарат застосовується усіма науками. З цієї точки зору математику можна розглядати як спосіб і засіб поглиблення природничо-наукового знання» [12, 32].

Важливою є думка С. У. Гончаренко про роль задач у формуванні наукового мислення: «Задачі повинні розвивати навички у використанні загальних законів природознавства для вирішення конкретних питань, які мають пізнавальне і практичне значення, навички аналізу» [1, 39]. Особливу роль навчальній задачі в розвитку мислення відводив Г. С. Костюк, характеризуючи навчальні задачі як «структурні одиниці навчального матеріалу» [6, 21]. Автор диференціює їх за провідною роллю тих чи інших психічних процесів (розділяючи на розумові, перцептивні, мнемічні, імажинативні), підкреслює необхідність забезпечення розумовим задачам центрального місця в структурі навчання. Мисленнєві дії зумовлюються змістом задач, на розв'язання яких вони спрямовані. А зміст задач визначається об'єктивним світом через потреби, інтереси людини і наявні вже в неї знання. У взаємодії людини із зовнішнім світом часто виникають проблемні ситуації, тобто такі обставини, за яких вона зустрічається з чимось новим, невідомим і водночас істотно важливим для неї, таким, що вона не може одразу з'ясувати. По мірі того, як людина усвідомлює ситуацію, з'ясовує дані в ній умови, ситуація перетворюється на задачу, яка спонукає до пошуку шляхів з'ясування невідомого через визначення зв'язків з тим, що відомо, дано в умові.

Зроблені Г. С. Костюком дослідження і сформульовані ним висновки дають підстави стверджувати, що задачі відіграють важливу роль у розвитку мислення учнів, проте ефективність формування певних якостей особистості залежить від того, в якій мірі зміст задачі й характер складання системи задач відповідають сутності феномена, який формується. Тому, розглядаючи задачний підхід як один із засобів формування умінь логічно оперувати навчальним матеріалом, ми дотримуємося точки зору тих дослідників [7; 4; 9], які розглядають навчальну задачу як специфічну форму організації змісту навчального матеріалу, що дозволяє учням оволодівати знаннями й уміннями, а також розвивати свої особистісні якості.

Задачний підхід ми розуміємо як навчальну діяльність, в основу якої покладено задачну структуру, компонентами якої є навчальна задача, яка, з одного боку, спрямована своїми вимогами на зовнішній об'єкт, а з іншого — містить в собі неявно виражені вимоги до суб'єкта, що її розв'язує. Задачний підхід до навчання, в нашому розумінні, передбачає введення до змісту навчальної інформації, а отже і пропозиції в підручниках, таких завдань, які активізують мисленнєві процеси учнів, закріплюють в них уміння оперувати теоретичними знаннями в практичних ситуаціях.

У педагогічній літературі здійснення міжпредметних зв'язків в області змісту освіти, методів і організаційних форм навчання досліджувалися багаторазово. Підхід до характеру знань, умінь та навичок учнів з точки зору міжпредметних зв'язків здійснювався значно рідше. Різні концепції його здійснення відображено у фундаментальних дослідженнях Є. М. Кабанової-Меллер [5], Н. А. Лошкарьової [8]. Необхідно також відзначити публікацію ряду статей, де в тій чи іншій мірі автори торкалися проблеми міжпредметних зв'язків в процесі формування умінь. Проте в більшості з них ця проблема розкривалася або опосередковано, або фрагментарно.

Побудова предметного навчання за інтегрованим типом має сприяти формуванню в учнів цілісної наукової картини світу, жорстко не обмежуючи кут зору (через фізику, біологію, хімію тощо), дає можливість учневі самостійно обрати «опорні» знання з різних наук із максимальною орієнтацією на власний досвід.

У нашому дослідженні здатність учнів до інтеграції, структурування й систематизації наявних знань і умінь для розв'язання реальних життєвих задач ми вважали одним із критеріїв досягнення високого рівня творчого саморозвитку особистості.

На основі вищезазначеного виділимо наступні дидактичні умови:

1) Створювати технологію навчання на основі міжпредметного задачного підходу.

2) Залучати учнів до активної пізнавальної діяльності щодо виконання міжпредметних завдань і вправ різного рівня складності.

Обґрунтовуючи сформульовані дидактичні умови, зосередимо увагу на вікових особливостях старшокласників. Саме у старшокласників формуються активна життєва позиція, більш свідоме ставлення до вибору майбутньої професії, до самовизначення і самосвідомості, формується світогляд, навички трудової й навчально-пізнавальної діяльності. Більш складні зміст і методи навчання старшокласників вимагають від них і більш високого рівня самостійності, активності, організованості, умінь застосовувати на практиці прийоми й операції мислення. Різко зростає потреба в самоконтролі й самовихованні, в знаннях своїх здібностей і можливостей їх реалізації, розвивається ініціатива і саморегуляція. Мислення стає більш глибоким, повним, всебічним і дедалі абстрактнішим; в процесі ознайомлення з новими прийомами розумової діяльності модернізуються старі, засвоєні на попередніх ступенях навчання. Оволодіння вищими формами мислення сприяє розвитку потреби в інтелектуальній діяльності, зрештою приводить до розуміння важливості теорії і прагнення застосовувати її на практиці.

Для старшокласників важлива значущість самого навчання, його завдань, цілей, змісту і методів. Зміна значущості навчання впливає на ставлення учня не тільки до навчання, а й до самого себе. Підліток може просто опанувати прийом розумової діяльності, а вже потім застосовувати його в разі потреби; старшокласник спочатку намагається зрозуміти значущість цього прийому, а потім вже й освоїти його, якщо він справді значущий. Старшокласник виявляє поглиблену цікавість до себе самого, до свого мислення, до своїх переживань. У психологічному образі юнака або дівчини нерідко поєднуються активність думки, схильність до міркування, емоційна вразливість, зацікавленість своїм майбутнім, оцінкою своєї придатності до професії, що обирається. Це багато в чому сприяє розвитку таких якостей як спостережливість, вибірковість, критичність. Змінюються і мотиви навчання, тому що вони набувають для старшокласника важливого життєвого сенсу. Характерним також є посилення ролі узагальнень і абстракцій у розумовій діяльності: старшокласники розуміють загальне значення конкретних факторів, розуміють, що конкретний образ виступає не лише як факт, узятий окремо, але й як виразник загального.

Побудова технології навчання на основі міжпредметного задачного підходу перш за все передбачає пред'явлення учням навчальних задач, які забезпечують засвоєння змісту навчання у вигляді певної системи. Створення системи задач не є простим методичним процесом. Існують різні точки зору й підходи щодо створення систем задач. Так, у методичній літературі пропонують створювати систему задач на засвоєння поняття і його визначення; систему задач на засвоєння теореми й її доведення; систему задач на засвоєння правил і алгоритмів. Сформульовані положення, яких слід дотримуватися вчителеві під час створення системи задач. Відповідно до теорії поетапного формування розумових дій пропонують і виділяють три основних типи орієнтування в завданні [3, 10—12].

Виходячи із завдань власного дослідження, вважаємо, що в основу міжпредметного задачного підходу в процесі вивчення дисциплін природничо-математичного циклу має бути покладена наступна послідовність рівнів ускладненості задач (табл. 1).

Використання міжпредметних завдань різного рівня складності, дібраних за вищевказаними вимогами, в ході особистісно орієнтованого навчання є дієвим засобом формування в учнів інтелектуальних умінь і, зокрема, засвоєння їх універсальності.

Залучення учнів до активної пізнавальної діяльності щодо виконання міжпредметних завдань і вправ різного рівня складності висуває такі додаткові вимоги до організації роботи учнів: створення мотиву діяльності, забезпечення активного ставлення учнів до виконання завдання через вплив на їхню емоційно-особистісну сферу; використання варіативних багатокомпонентних завдань, що дають змогу враховувати підготовленість учнів: якість їхніх знань з предмета та оволодіння інтелектуальними уміннями; поступове збільшення частки самостійності учнів при виконанні завдань: перехід до роботи за зразком, до роботи за допомогою усної

Таблиця 1

Послідовність рівнів ускладненості задач

Рівень задачі	Ступінь ускладненості задачі	Рівень навченості учня	Кваліфікаційна характеристика
1.	Явище описане без урахування взаємозв'язків з іншими явищами	Розрізнення	Елементарна орієнтація учня в навчальному матеріалі
2.	В задачі відображено взаємозв'язок однохарактерних явищ	Запам'ятовування	Здатність учня механічно запам'ятовувати навчальні тексти різного обсягу
3.	В задачі відображено взаємозв'язок різнохарактерних явищ	Розуміння	Здатність орієнтуватися в причинно-наслідкових та інших зв'язках й механізмах
4.	В задачі відображено зв'язок явищ, які невідомі учням із теорії і неочевидні для них	Елементарні уміння	Здатність застосовувати відтворені на попередніх рівнях знання до розв'язання стандартних задач
5.	Зв'язок між елементами, характерний для певної нестандартної ситуації	Перенесення	Здатність переносити знання попередніх рівнів на нестандартні завдання

інструкції вчителя, до повної самостійності; використання різних форм організації роботи учнів (фронтальна, групова, індивідуальна), що сприяє інтелектуальному розвитку учнів [2].

Один із способів творчого розвитку особистості ми вбачаємо в постановці учням міжпредметних завдань різного рівня складності. Рівень складності завдань обумовлюється, по-перше, зазначеною вище логікою пред'явлення завдань учням, а по-друге, процедурою засвоєння учнями умінь.

Ступінь ускладненості міжпредметних завдань, підібраних за вказаною схемою, ми вбачаємо в пред'явленні учням допрофільних завдань (зміст завдань спирається на здобуті знання й попередній досвід і готує учнів до осмисленого сприйняття змісту знань і умінь при вивченні природничих дисциплін); профільних завдань (система багатокомпонентних завдань з окремої дисципліни, спрямована на формування певних груп інтелектуальних умінь); міжпрофільних завдань (задачі хімії, біології, фізики, які потребують для розв'язання пошуку й використання зв'язків з іншими природничими дисциплінами й спрямовані на формування в учнів міжпредметного характеру інтелектуальних умінь).

З метою перевірки ефективності дотримання зазначених дидактичних умов описані системи завдань пропонувалися учням в ході експерименту на уроках хімії, біології та фізики. Учні, які брали участь в експериментальному навчанні, були розділені на дві групи: перша група — класи з поглибленим вивченням фізики та математики; друга група — класи з поглибленим вивченням хімії та біології. Завдання, які пропонувалися учням на заняттях факультативу, було підібрано у відповідності до інтересів учнів і умовно поділено на три групи: 1) допрофільні завдання; 2) профільні завдання; 3) завдання міжпредметного характеру (міжпрофільні).

До групи допрофільних завдань нами було віднесено наступні:

1. Знайдіть закономірність і заповніть пропуски в заданих послідовностях:
   а) 82, 97, 114, 133, ..., ...;
   б) 15, 16, 14, 17, 13, 18, ..., ...;
   в) 9, 1, 7, 1, ..., ..., 3, 1;
   г) 1, 8, ..., 64, ...;
   д) 66, 34, 18, 10, 6, 4, ..., ...;
   е) 57, 60, 30, 34, 17, 22, 11, ..., ...
2. Закінчить речення:
   а) З того, що Петро вищий за Миколу, а Микола вищий за Марію, випливає, що ... .
   б) Олексій має зріст більший, ніж Богдан, а Богдан більший, ніж Віра. Які за зростом Олексій і Віра?
   в) А > Б у 9 разів, Б < В у 4 рази, порівняйте В і А.
   г) А < Б у 10 разів, Б > В у 6 раз, які між собою А і В?
   д) А < Б у 5 раз, Б > В у 2 рази, які між собою А і В?
3. Вирішіть проблему вибору плити для кухні:
   а) Яку плиту — газову чи електричну ви хотіли б мати на своїй кухні?
   б) Чому кухню з газовою плитою необхідно провітрювати частіше, ніж кухню з електричною плитою?
4. Чому не можна гасити водою:
   а) пожежу провідника електричного струму;
   б) деякі горючі рідини;
   в) горючі метали (магній)?
5. Поясніть чому:
   а) взимку перед запуском двигуна автомобіля спочатку рекомендується на нетривалий час включити фари і лише потім увімкнути двигун?
   б) після зимового періоду експлуатації машину необхідно ретельно вимити, особливо низ кузова?
6. Чотири різних за масою предмети потрібно розташувати в порядку зменшення їхніх мас. Користуватися для цього можна лише чашковими вагами без гир. Скільки зважувань достатньо для розв'язання цієї задачі?
7. Розподіліть хімічні елементи: Al, C, Cl, F, N, Na, Ne, O, P, S
   а) у залежності від зростаючого числа протонів в ядрі атома;
   б) у залежності від збільшення числа валентних електронів (у випадку однакового числа валентних електронів першим назвіть елемент з меншим загальним числом електронів);
   в) на дві групи за місцем їхнього розташування в другому і третьому періодах періодичної системи елементів;
   г) у залежності від зростаючої відносної атомної маси елемента [10].

На наступному етапі учням пропонувалися задачі з хімії, фізики, математики, віднесені нами до групи профільних завдань, які поступово ускладнювалися за своїми вимогами й потребували використання метазнань. При цьому незалежно від навчальної дисципліни підвищення ступеня складності задач відбувалося у послідовності зазначеній в табл. 1.

Узагальнююче повторення (завдання міжпредметного характеру) за інтегрованою схемою передбачало наступні кроки: 1) повторення і систематизація основних теоретичних положень і провідних ідей науки в рамках розглядуваної теми; 2) введення розглядуваного теоретичного положення в практичну діяльність або споріднені дисципліни; 3) визначення важливості досліджуваного положення для подальшого теоретичного розвитку науки в рамках розглядуваної та споріднених дисциплін; 4) окреслення кола задач, які можливо розв'язати, спираючись на дане теоретичне положення.

У класах як першої, так і другої групи за інтегрованою схемою відбувалося узагальнююче повторення на уроках фізики, хімії, біології, в ході якого відшукувалися, обґрунтовувалися й використовувалися можливості математичного моделювання у дослідженнях з біології, хімії, фізики. При цьому здійснювався аналіз ролі математичного апарата в дослідженнях природничих дисциплін.

Наведемо приклади задач з фізики, в яких необхідні знання геометрії за курс 10—11-х класів, які пропонувалися учням на цьому етапі експерименту.

1. У вершинах основи правильної чотирьокутної піраміди знаходяться заряди. Знайти напруженість $\vec{E}$ у вершині піраміди.

2. Взаємно перпендикулярні швидкості при підйомі вантажу мостовим краном дорівнюють відповідно $\left|\overline{V_1}\right| = 0.3$ м/с, $\left|\overline{V_2}\right| = 0.4$ м/с, $\left|\overline{V_3}\right| = 0.5$ м/с. З якою швидкістю переміщується вантаж у просторі?

3. Правильний октаедр з проволоки підключений в електричне коло двома протилежними вершинами A і B. Знайти його повний опір, знаючи, що опір кожного його ребра дорівнює 1 Ом.

4. Як слід розташувати лампи, кіноплівку та екран, щоб контур кіноплівки на екрані був подібний контурам самої кіноплівки?

5. Кубічній кристалічній гратці вольфраму (W) відповідає $n = 2$ атоми. Знайти довжину ребра даної кристалічної гратки ($P_w = 19.3$ г/см^3, $M_w = 184$ г/моль).

6. Камера шлюзу каналу має довжину 300 м, ширину 30 м та висоту 8 м. Для наповнення камери воду підводять за двома галереями квадратного перетину зі сторонами 4,5 м і швидкістю 2,5 м/с. Скільки часу потрібно для заповнення камери водою?

7. Найбільший алмаз у світі під назвою «Кулліан», добутий в Африці, вагою 3106 карат (1 карат — 0,2 г), має форму октаедра. Відомо, що ребро кристалу дорівнює 5,69 см. Знайдіть густину ρ цього алмазу.

8. Землесос виймає 500 м^3 ґрунту за годину, об'єм пульпи (ґрунт, змішаний з водою) у 10 разів більше об'єму ґрунту. Яка швидкість руху пульпи в трубі діаметром 0,6 м?

9. Площа поверхні шару, виготовленого з металу з коефіцієнтом об'ємного розширення α при 0°C дорівнювала s_0. На скільки збільшиться площа поверхні шару, якщо його нагріти до температури t°C?

Таким чином, при організації навчання за інтегрованою схемою зміст завдань, запропонованих учням, сприяв формуванню таких умінь як перенесення засвоєних способів діяльності в нові умови (наприклад, відома математична (фізична) задача переноситься в іншу сферу знань або діяльності, виникає проблема її використання); бачення нової проблеми в знайомій ситуації (на протікання знайомого природничого процесу здійснюється вплив збоку деяких зовнішніх факторів, виникає проблема, яка потребує розв'язання); комбінування відомих способів діяльності в новій формі (застосування знань, здобутих із різних дисциплін для дослідження комплексної задачі або проблеми). Це дало змогу не тільки сформувати в учнів специфічні предметні вміння, уявлення про явище або процес, що вивчається, але й формувати уміння проводити аналіз, порівнювати, застосовувати необхідні прийоми розумової діяльності, робити висновки.

Саме використання допрофільних завдань сприяло, по-перше, мотивації навчання, а по-друге, використанню суб'єктивного досвіду учнів для якісного формування умінь розв'язувати задачі. Профільні завдання з логічним навантаженням сприяли формуванню таких умінь як застосовування прийомів розумової діяльності для засвоєння знань; перенесення засвоєних способів діяльності в нові умови; самостійне комбінування відомих способів діяльності в нові. Узагальнюючим моментом експериментального навчання природничих дисциплін стало введення в зміст навчання міжпрофільних завдань інтегрованого характеру різного рівня складності.

Література

1. *Гончаренко С. У.* Методологические и теоретические основы формирования у учащихся средней школы естественнонаучной картины мира: Автореф. дис. ... д-ра пед. наук в форме научн. докл.: 13.00.01; 13.00.02 / КГПИ им. А. М. Горького. — К., 1989. — 56 с.

2. *Емельянова Е. О.* Многокомпонентные задания как средство развития интеллектуальных умений учащихся // Химия в школе. — 2001. — № 5. — С. 23–25.

3. Зависимость обучения от типа ориентировочной деятельности / Под ред. П. Я. Гальперина и Н. Ф. Талызиной. — М., 1968. — 238 с.

4. *Загвязинский В. И.* О движущих силах учебного процесса // Советская психология. — 1973. — № 6. — С. 37–42.

5. Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся / Е. Н. Кабанова-Меллер. — М., 1968. — 288 с.

6. *Костюк Г. С.* Навчання і психічний розвиток учнів // Психологічна наука, учитель, учень. — К., 1979. — С. 19–32.

7. *Костюк Г. С., Балл Г. А., Машбиц Е. И.* О задачном подходе к исследованию учебной деятельности // Психология человеческого учения и решение проблем: 2-я Пражская конференция: Резюме. — Прага, 1973. — С. 70.

8. *Лошкарева Н. А.* Межпредметные связи и проблема формирования умений // Советская педагогика. — 1973. — № 10. — С. 31–38.

9. *Рычик М. В.* От наглядных образцов к научным понятиям. — К.: Рад. школа, 1987. — 80 с.

10. Сто одиннадцать вопросов по химии... для всех: Кн. для учащихся / П. Бенеш и др. — М.: Просвещение, 1994. — 191 с.

11. Дидактичні засади реформування змісту шкільної освіти / С. Е. Трубачова // Психолого-педагогічні проблеми сільської школи: Зб. наук. пр. / Уман. держ. пед. ун-т ім. Павла Тичини. — К., 2002. — Вип. 1. — С. 32–34.

12. *Хамитова А. И., Яблочкина Т. К.* О математических методах решения химических задач // Химия в школе. — 2002. — № 6. — С. 32–35.

І. В. ЛОВ'ЯНОВА,
канд. пед. наук, доцент кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету.

УДК [371.26:51]:376.54

ПРО ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ В ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ ШКОЛАХ І СПЕЦІАЛІЗОВАНИХ МАТЕМАТИЧНИХ КЛАСАХ ТА ЛІЦЕЯХ

В роботі обґрунтовується, чому в нинішніх загальноосвітніх школах не варто вивчати елементи математичного аналізу, в той час, як в математичних класах та ліцеях це треба робити обов'язково.

This article substantiates why it does not make sense to study mathematical analysis in general education schools now days. At the same time it explains why this study is mandatory for specialized mathematical schools and colleges.

Фахівці, які працюють у вищій школі, викладаючи математику для майбутніх спеціалістів, підготовка яких вимагає знань з цієї науки, помічають, як з року в рік у випускників загальноосвітніх шкіл знижується рівень знань з математики. Особливо це видно тим викладачам, які беруть участь у перевірці робіт випускників шкіл, які вони виконують під час проведення зовнішнього тестування. Зокрема, в цьому році, незважаючи на досить прості задачі третьої частини тестів, надзвичайно мало випускників шкіл не тільки не розв'язали ці три задачі, а навіть не брались за них. При цьому слід врахувати, що тест з математики писали не всі випускники загальноосвітніх шкіл, а лише ті, яким для вступу до обраного ними вузу потрібен був сертифікат з математики, а це означає, що у випускників шкіл вкрай незадовільні знання з математики. В чому ж причина такого становища?

Причин, безсумнівно, є дуже багато, але ми торкнемось лише деяких з них, які, з нашої точки зору, можна усунути. Для цього подивимось на обсяг програми з математики в старших класах загальноосвітньої школи та час на її реалізацію. Що стосується останнього, то в старших класах передбачено три, в кращому випадку чотири години математики на тиждень. За цей час учні повинні вивчити всю стереометрію, елементи математичного аналізу, комбінаторику, елементи теорії ймовірностей та алгебру. В результаті виходить, що в переважній своїй більшості наші випускники не знають практично нічого: вони не вміють робити елементарних перетворень, будувати і аналізувати графіки функцій, зовсім не володіють тригонометрією, не мають елементарних просторових уявлень, навіть не підходять близько до розуміння елементів математичного аналізу, хоча на його вивчення витрачається половина уроків з алгебри, те ж саме з елементами теорії ймовірностей (в багатьох школах їх практично не вивчають зовсім). Крім цього, випускники наших шкіл зовсім не вміють читати математичні тексти, вони не навчені тому, що задача інколи може розв'язуватись довше, ніж 5-10 хвилин (в них взагалі немає навичок розв'язання не зовсім тривіальних задач). Все це зовсім не сприяє тому, щоб з такого студента можна було підготувати якісного спеціаліста в газузі математики, фізики, техніки, економіки.

Що ж потрібно зробити, щоб у майбутньому можна було уникнути перерахованих вище: «вони не вміють», «вони не знають», «вони не володіють»? Спілкування автора протягом останніх років з багатьма вчителями математики, а також із студентами приводить до думки, яку поділяють багато вчителів математики і викладачів університетів: справу можна покращати, якщо змінити обсяг матеріалу з математики в старших класах та час на його вивчення. Існують два шляхи: 1) значно збільшити в загальноосвітній школі час на вивчення математики; 2) переглянути програму з математики дещо скоротивши її і, можливо, зовсім незначно збільшивши кількість годин на її вивчення в старших класах. Малоймовірно, що можна розраховувати на перший варіант, бо ніхто в загальноосвітній школі набагато не збільшить час на вивчення математики. Отже залишається другий варіант. Тоді виникає питання: а що ж вилучати з програми шкільної математики? Добре зрозуміло, що це не повинна бути елементарна математика, більше того, їй потрібно приділити значно більше уваги, ніж зараз: треба вчити учнів робити тотожні перетворення, особливо з тригонометричними, логарифмічними та показниковими виразами; елементарними методами будувати графіки і бачити за ними властивості функцій; розв'язувати різноманітні рівняння та нерівності; вчити думати і бачити, що математика — це потужна наука, де все логічно пов'язано. Якщо подивитись на математичний аналіз в шкільній математиці, на те, як він там викладається і застосовується, а потім використовується в майбутньому випускниками шкіл, то неважко прийти до думки — користі учню від такого викладання зовсім небагато. Більше того, очевидно, що таке його вивчення завдає шкоди думаючому учню, бо все тут робиться «на пальцях», майже нічого не обґрунтовується, заучуються без розуміння якісь незрозумілі означення і формулювання теорем, а потім за принципом «роби, як я» демонструються окремі застосування похідної чи інтеграла. Крім того, ні один університет, який себе хоча б трішки поважає, при викладанні математичного аналізу зовсім не використовує того, що учні вивчали в школі, і починає його виклад «з нуля». У зв'язку з цим ми переконані, що в школі (загальноосвітній!) можна зовсім відмовитись від вивчення анализу, за рахунок цього приділити значно більше уваги елементарній математиці, що дозволить, з нашої точки зору, збільшити процент тих випускників таких шкіл, які знають і розуміють математику і яким у майбутньому можна читати серйозні курси математичного аналізу, алгебри, геометрії та інших технічних і економічних дисциплін. Якщо ж в нашій школі найближчим часом нічого не зміниться з математикою, то зовсім скоро її чекає така ж участь, як фізику, яка, як відомо, переживає зараз найгірші свої часи і відродити яку надзвичайно важко.

Що стосується математичних класів, ліцеїв та інших подібних закладів, то, враховуючи те, що на вивчення математики там виділяється значно більше часу, ніж в загальноосвітній школі, а також те, що в більшості з них приймають не всіх учнів, а вибірково, тут обов'язково потрібно викладати аналіз та ще й значно глибше, ніж це робиться зараз в багатьох математичних ліцеях. На основі нашого багаторічного досвіду викладання аналізу в ліцеї при фізико-математичному факультеті Тернопільського педуніверситету ми можемо стверджувати, що учні досить добре і глибоко освоюють символіку аналізу, використовують її для доведення різних теорем, чітко розуміють границю, похідну, первісну та інтеграл Рімана і можуть все це не формально використовувати в математиці, фізиці, а там, де це потрібно. Про все це ми вже говорили на декількох конференціях [1—3], скажемо тільки, що, з нашої точки зору, аналіз слід читати не послідовно за алгеброю, а паралельно з нею, щоб не було великих розривів як між елементарною математикою, так і між математичним аналізом, адже це своєрідні дисципліни, і варто забезпечити неперервність викладання кожної з них. Безперечно, в процесі вивчення математичного аналізу багатьом його поняттям і фактам, в залежності від смаків і уподобань викладача, можна надавати різних інтерпретацій і прикладів застосування, в тому числі і для розв'язання багатьох різноманітних задач олімпіадного характеру, багато з яких чудово розв'язуються не тільки з використанням фактів аналізу, але й його методів і прийомів.

Як ми вже говорили вище, учні ліцею, при належному викладанні, добре засвоюють аналіз, причому не «спотворений», як в загальній школі, а чіткий, з усіма формулюваннями означень і доведеннями теорем. Нам вдавалось за два роки прочитати їм класичний аналіз функції однієї змінної (без теорії рядів), тобто матеріал, який викладається на математичних спеціальностях університетів на першому курсі, причому рівень його розуміння учнями був вищий, ніж студентами. Може виникнути запитання: а навіщо це робити, адже при вступі до університету такі студенти знову вивчають цей самий матеріал? Навіть якщо й так, то думаючий студент і з такої ситуації знайде користь, але такі великі університети, як Київський, Одеський, Львівський, Харківський та деякі інші, маючи відповідні ліцеї, могли б з їх випускників створювати на першому курсі спеціальні групи, які б займалися за особливою програмою і тоді, починаючи вже принаймні з другого курсу, такі студенти мали б можливість вже серйозно займатись науковою роботою. Свого часу в Тернопільському педуніверситеті були такі групи, навчаючись в яких студенти одержували надзвичайно глибоку математичну підготовку.

На закінчення відзначимо, що ми своєю роботою хотіли хоча б частково привернути увагу до тих серйозних проблем, які переживає нинішня шкільна математика, і можливо в майбутньому спільними зусиллями змінити ситуацію на краще, адже значна частина майбутніх абітурієнтів закінчує загальноосвітні школи.

Література

1. *Лотоцький В. А.* Про вивчення математичного аналізу в загальноосвітніх та спеціалізованих школах, ліцеях та гімназіях фізико-математичного профілю // 3-я Конференція Соросівських учителів: Зб. доп. — К., 1998. — Ч. 2. — С. 203–210.
2. *Лотоцький В. А.* Про вивчення невизначеного інтеграла в спеціалізованих математичних ліцеях та гімназіях // 7-ма Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 11—14 трав. 2000 р.: Матеріали конф. — К., 2000. — С. 527—528.
3. *Лотоцький В. А.* Про вивчення інтеграла Рімана в математичних ліцеях та гімназіях // 9-та Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука, 16—19 трав. 2002 р.: Матеріали конф. — К., 2002. — С. 521.

В. А. ЛОТОЦЬКИЙ,
доцент, канд. фіз.-мат. наук Тернопільського національного педагогічного університету ім. Володимира Гнатюка.

УДК 373.0+ 370.1821+ 371.3.53+51

ЗНАКИ «ПЛЮС» ТА «МІНУС» У ФІЗИЦІ

Статтю присвячено деяким питанням викладання фізики в середній школі, які досі не знаходили свого відображення в методичній літературі.

Навчально-пізнавальна діяльність учнів в процесі вивчення фізики складається з формування структурних елементів фізичних знань, експериментальних вмінь та вмінь розв'язувати фізичні задачі. Формування структурних елементів фізичних знань повинно бути підпорядковано не формальному засвоєнню означень та формул фізичних величин, а забезпеченню розуміння учнями глибинних основ змісту понять, об'єктивності та необхідності їх введення в науку, тобто формуванню їх світогляду, розвитку креативного мислення, вміння критично ставитись до реалізації отриманих ними знань на практиці.

Важливою складовою частиною такої роботи вчителя фізики є акцентування уваги учнів на походження знаків «+» та «—» у математичних рівняннях. На цей аспект компетентнісного підходу в методиці навчання фізики нас наштовхнула дискусія серед вчителів та методистів з приводу задачі № 30 в основній тестовій сесії 2009 року, де потрібно було на основі графіка $P=f(V)$ визначити кількість теплоти, отриманої ідеальним газом під час процесу, який зображено (рис. 1).

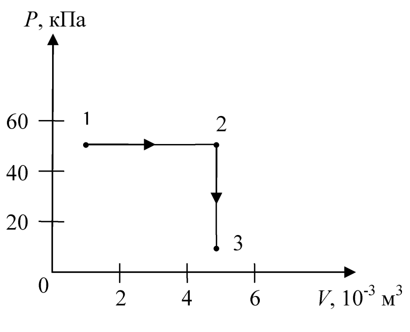


Рис. 1.

Зрозуміло, що внутрішня енергія ідеального газу залежить тільки від температури (цього не потрібно було писати в умові, тому що учні повинні це знати).

У цьому випадку при $\Delta U=0$ $\Delta Q=P\Delta V$, а дискусія виникла тому, що деякі учасники стверджували, що тепло в процесі 1—2 система отримувала, а в процесі 2—3 — віддавала. Це не так, бо у формулюванні першого закону термодинаміки мова йде про отриману кількість теплоти, яка може бути як позитивною, так і негативною.

Дійсно, згідно із законом збереження енергії, отримана в системі кількість теплоти повинна дорівнювати сумі приросту внутрішньої енергії системи і роботи, виконаної силами системи над зовнішніми тілами, тобто $Q=\Delta V+A'$.

Отже і умова задачі, і відповідь на завдання ($Q=S_{\text{прямокутника}}$; $Q=50\times10^{3}\frac{Н}{м^{2}}\times4\times10^{-3}м^{3}$; $Q=200Дж$) вірні.

Приклади методологічної важливості вірної розстановки знаків можна знайти в різних розділах шкільного курсу фізики.

Механіка.

Не можна писати, що $v=v_0-gt$, бо $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{g}t$, або $v_x=v_{0x}-g_xt$. Аналогічно слід підходити і до рівняння шляху чи висоти для рівнозмінного руху. Визначаючи відносну швидкість двох тіл, не слід писати, що $v_{\text{відн}}=v_1-v_2$, або $v_{\text{відн}}=v_1+v_2$, через те, що і тут треба вибрати вісь і знаходити проекції векторів v_1 і v_2, тобто писати завжди потрібно $\vec{v}_{\text{відн.}}=\vec{v}_1-\vec{v}_2$ *.

Не слід заздалегідь приписувати «+» чи «—» силі чи роботі. Сила — векторна величина, а знак перед F з'являється лише при проектуванні вектора на відповідну вісь системи координат, тобто при знаходженні рівнодіючих сил, що діють вздовж однієї прямої, завжди $\vec{F}_p=\vec{F}_1+\vec{F}_2$.

Щодо роботи сили, то тут її знак залежить від напрямків векторів сили і переміщення, тобто від знака $\cos\alpha$.

Слід відзначити, що відповідно до прийнятого сьогодні підходу до присвоєння знаків не кожна робота сили тертя від'ємна (робота сили тертя спокою може бути і позитивною). У формулі, яка відображає закон Гука для пружної деформації твердих тіл, слід писати $F_{\text{хпруж}}=-kx$, бо проекції сили пружності і відносної деформації твердого тіла мають різні знаки.

Часто в підручниках з приводу збереження механічної енергії пишуть, що зміна одного з видів енергії повинна компенсуватися протилежною зміною іншого виду, тобто $\Delta E_{\text{п}}=-\Delta E_{\text{к}}$.

Не слід перед кінетичною енергією ставити знак «—».

Краще цю думку виразити рівняннями $\Delta W=0$ чи $\Delta E_{\text{п}}+\Delta E_{\text{к}}=0$ (зміна повної механічної енергії в ізольованих системах не відбувається).

Теплота.

Рівняння теплового балансу в сучасних підручниках іноді пишуть так: $Q_1^{+}+Q_2^{+}+Q_3^{+}+\ldots=Q_1^{-}+Q_2^{-}+Q_3^{-}+\ldots$, вва-

* В 7—8-х класах виникають труднощі, пов'язані з програмою з математики, але їх можна уникнути на державному рівні або шляхом внесення змін у планування, яке затверджується педрадою школи.

жаючи, що Q_1^+, Q_2^+ і т. д. — це позитивні кількості теплоти, бо вони одержані системою, а Q_1^-, Q_2^- і т. д. — це від'ємні кількості теплоти, бо вони виділені системою тіл. Знову якесь правило для запам'ятовунання. Це рівняння треба писати так $Q_1+Q_2+Q_3+Q_4+Q_5+\ldots=0$, і завжди для отримання зміни температури того чи іншого тіла треба від кінцевого її чисельного значення віднімати початкове.

Електростатика.

Ми пропонуємо при вивченні закону Кулона для точкових електричних зарядів пояснити учням, що, як показали експеримент та вимірювання, існують два види взаємодії нерухомих зарядів: притягання та відштовхування. Тому ми повинні були ввести два види електричних зарядів, які назвали позитивними (+) та негативними (—), а щоб відійти від модулів зарядів q_1 та q_2 у формулі закону Кулона точніше було б ввести одиничний вектор (орт) і записати закон у векторному вигляді: $\vec{F}=k\dfrac{q_1q_2}{\varepsilon r^2}\times\dfrac{\vec{r}}{r}$, не звертаючи уваги на знаки зарядів, а напрямок сили ми отримуємо автоматично.

Геометрична оптика.

Тут давно вже прийнято відстань від предмета до лінзи (d) завжди вважати позитивною, а головну фокусну відстань лінзи (F) і відстань від лінзи до зображення предмета (f) вважати позитивними лише у випадку збиральної лінзи і дійсного зображення, F вважати від'ємною для розсіювальної лінзи і f — від'ємною для випадку уявного зображення. Це вірно, але дуже формально.

В кінці кінців воно приведе до правильної відповіді на питання задачі, але не допоможе зрозуміти механізм і суть такої розстановки знаків. Ми пропонуємо подібну задачу з будь-якою лінзою розв'язувати за єдиною для всіх випадків формулою $\dfrac{1}{F}=\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{f}$, вибравши дві пари взаємно перпендикулярних осей d та h (де h — висота предмета) і F, f та H (де H — висота зображення), а початок цих координат поєднати з центром тонкої лінзи (рис. 2).

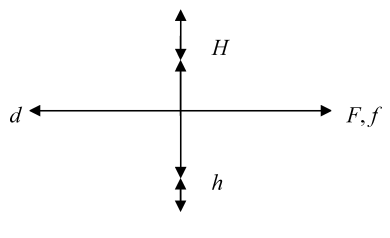


Рис. 2.

Покажемо це на прикладі розв'язування задачі.

Точкове джерело світла знаходиться на відстані d від тонкої лінзи з головною фокусною відстанню F на відстані h від її головної оптичної осі. Визначити положення та характер зображення.

Аналіз умови. Проведемо площину через головну оптичну вісь лінзи та джерело світла. Очевидно, що зображення також знаходиться в цій площині. Таким чином, для розв'язання задачі нам потрібно визначити H та f. Величини d, f, F, H, h можуть бути як позитивними, так і від'ємними. З формули лінзи $\dfrac{1}{F}=\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{f}$ та збільшення $\tilde{A}=\dfrac{f}{d}$ або $\tilde{A}=\dfrac{H}{h}$ отримаємо:

$$f=\frac{dF}{d-F},\ H=h\frac{F}{d-F},\text{тобто}\ \tilde{A}=\frac{F}{d-F}.$$

Ці формули справедливі для будь-яких числових значень даних величин. Зокрема, розглянемо випадок, коли $d<0$ (світловий пучок, який збирається), $h<0$ (світло падає зліва), предмет (уявний) знаходиться над оптичною віссю.

Або випадок, коли $F<0$ (лінза розсіювальна). Тоді: а) якщо $d>F$, то $f>0\Rightarrow$ зображення знаходиться праворуч від лінзи, $H<0$, тобто зображення знаходиться під оптичною віссю; $\tilde{A}<0$, тобто зображення дійсне; б) $d<F$, то $f<0$ — зображення знаходиться ліворуч від лінзи; $H>0$, тобто зображення знаходиться над оптичною віссю і $\tilde{A}>0$, тобто зображення уявне.

Перелік аналогічних прикладів можна продовжити: плутанина зі знаком потенціальної енергії взаємодії молекул (тут обираємо нульовий рівень то в положенні рівноваги, то на нескінченності); закони збереження імпульсу та моменту імпульсу, закон Ома для кола змінного струму (векторна діаграма).

Виходячи з принципів системності, повноти, непротиріччя та достовірності у навчанні фізики, ми зможемо розвинути природничо-наукове мислення учнів та підвищити його до теоретичного рівня через формування у них системних предметних та міжпредметних знань.

Література

1. *Орир Дж.* Физика. — М.: Мир, 1981. — Т. 1. — С. 29–30, 85–89, 231–232, 272; Т. 2. — С. 416–418.

2. *Соурц К. Э.* Необыкновенная физика обыкновенных явлений. — М.: Наука, 1986. — Т. 1. — С. 45–48, 194–196, 235, 295–296; Т. 2. — С. 98–101, 144.

В. Л. МАНАКІН,
старший викладач Одеського національного університету ім. І. І. Мечникова, заслужений вчитель України,

Г. Б. РЕДЬКО,
професор Одеського інституту удосконалення вчителів, почесний професор Одеського національного педагогічного університету ім. К. Д. Ушинського,

Г. М. ТОЛПЕКІНА,
доцент Одеського національного педагогічного університету ім. К. Д. Ушинського.

УДК 372.851:511.17

РЕАЛІЗАЦІЯ КОНЦЕПЦІЇ ІНФОРМАЦІЙНО-ОСВІТНЬОГО СЕРЕДОВИЩА (ІОС) ТА ЇЇ ВПРОВАДЖЕННЯ В НАВЧАЛЬНО-ВИХОВНИЙ ПРОЦЕС

В статті обґрунтовано актуальність створення і викладено основні положення концепції інформаційно-освітнього середовища закладу середньої освіти та досвід реалізації концепції лабораторією інформаційних і комунікаційних технологій фізико-математичної гімназії № 17 м. Вінниці. Розглянуто основні напрямки реалізації: створення програмного забезпечення; апаратної платформи та мережної інфраструктури; навчання та підготовки кадрів.

In the article grounded actuality of creation and the substantive provisions of conception are expounded informatively educational environments of establishment of secondary education and experience of realization of conception by the laboratory of information and of communication technologies of Physics & mathematics High School 17 of Vinnytsya. Basic directions of realization are considered: creation of software; creation of vehicle platform and network infrastructure; studies and training of personnels.

Постановка проблеми. На сьогоднішній день в Україні понад 800 тис. дітей віком від 5 до 18 років використовують Інтернет. Кількість молодих онлайн-користувачів з кожним роком зростає більш ніж на 30%. При тому, що Інтернет є засобом розвитку і несе в собі великий освітній потенціал, він, водночас, містить негатив. Усі без винятку неповнолітні користувачі можуть піддаватися загрозам і навіть насильству, пов'язаних з використанням ресурсів мережі Інтернет. За статистикою лише 15% батьків здогадуються про труднощі, з якими стикаються їхні діти в Інтернеті; і менше половини батьків мають уявлення про елементарні засоби онлайн-безпеки. Відповідно до міжнародних даних навіть у розвинених країнах розкривається менше 1% кібер-злочинів, спрямованих проти дітей (зі звіту Національного центру захисту дітей від експлуатації та викрадень за 2004 рік, США). Проблема забезпечення безпеки дітей в Інтернеті не є винятково технічною або технологічною. Вона торкається виховних, освітніх і етичних, а також соціальних і правових аспектів. Величезне значення має виховний аспект.

Концепція єдиного інформаційно-освітнього середовища (далі ІОС), що реалізовується в гімназії, є концепцією створення навчальної та інформаційно-управлінської системи забезпечення життєдіяльності не лише ФМГ № 17, а й інших установ освіти регіону (району, міста, області). Єдине інформаційно-освітнє середовище є мережним комп'ютерним програмно-апаратним комплексом з ієрархічною (багаторівневою) структурою, що забезпечує:

0 (базовий) рівень — організацію навчального процесу в закладі освіти з використанням технологій комп'ютерного навчання, впровадження дистанційної підтримки процесу отримання знань, умінь та навичок учнями з використанням мережних навчальних ресурсів, організацію та проведення інтелектуальних змагань школярів (олімпіад, конкурсів тощо), наповнення Інтернет-простору україномовним навчальним контентом згідно з діючими державними програмами вивчення базових дисциплін в школах України;

1 рівень — впровадження комп'ютерних технологій в систему життєдіяльності закладів освіти (ведення шкільної документації, підготовка звітності, статистика, алфавітна книга, електронні класні журнали, бухгалтерія, мережна взаємодія з учнями та батьками);

2 рівень — взаємодію управління освіти міської ради з підпорядкованими закладами освіти: документообіг, електронна пошта, отримання звітів, збір статистики, ведення єдиної бази даних з різними рівнями доступу для різних груп користувачів (працівники апарату управління освіти, методичні служби, керівники установ освіти, вчителі, учні, батьки).

ІОС базується на використанні Інтернету/Інтернет технологій. Освітня галузь складається з великої кількості установ, віддалених одна від одної і розташованих на великій території. Цей фактор є вирішальним на користь вибору згаданої технології для побудови складної, розподіленої інформаційної системи.

Напрямки реалізації концепції. Необхідне програмне забезпечення створюється в лабораторії інформаційних і комунікаційних технологій фізико-математичної гімназії № 17 м. Вінниці. Ця робота була розпочата задовго до прийняття Вінницькою міською та Вінницькою обласною радами рішення про створення лабораторії і проводилася на громадських засадах з використанням можливостей вузла Інтернет PMG17, що був розбудований в гімназії на кошти гранту, отриманого за перемогу в конкурсі проектів МФВ (проект № 6465). Для створення мережного програмного забезпечення використовуються Open Source інструментальні засоби, що поширюються безкоштовно згідно з GNU General Public License, або купується відповідне ліцензійне програмне забезпечення. Програмне ядро системи включає 4 мережні програмні продукти, інтегровані між собою:

- Інтерактивний Інтернет-ресурс *http://disted.edu.vn.ua* — система дистанційної підтримки навчального процесу (власна розробка лабораторії за активної участі учнів гімназії). Система наповнюється навчальними матеріалами з базових предметів за діючими шкільними програмами. До створення навчальних матеріалів залучено кращих вчителів ФМГ № 17, міста, викладачів вузів. Будь-який учень України (або зарубіжжя — аби володів українською) може зареєструватися в системі та використовувати її в щоденній навчальній діяльності. Передбачено режим консультацій в реальному часі, які учням надає вчитель, що супроводжує предмет. На сьогодні в Інтернет-просторі України немає аналогів такої системи підтримки навчального процесу.

• Інтерактивний Інтернет-ресурс *http://www.olymp.vinnica.ua* — система проведення інтелектуальних змагань школярів з використанням можливостей Інтернету (власна розробка, перша версія існує в мережі з 1999 року, постійно вдосконалюється). Реалізовано *on-line* перевірку розв'язків завдань з інформатики, проведення інтелектуальних змагань школярів, зокрема, щорічне проведення (наказ МОН України № 638 від 06.11.02) Всеукраїнських Інтернет-олімпіад школярів з інформатики (*www.olymp.vinnica.ua*). Ідея використання Інтернету для проведення інтелектуальних змагань не нова і є суттєвою складовою дистанційної освіти. Олімпіади з інформатики якнайкраще орієнтовані на використання можливостей мережі, адже в будь-якому випадку учасники виконують завдання на комп'ютері, а результати їх роботи перевіряються автоматизованими системами. Це давно зрозуміли організатори олімпіад з інформатики, і сьогодні практично всі олімпіади вищих рівнів (Міжнародна олімпіада школярів з інформатики, етапи Чемпіонату світу серед студентів з програмування (АСМ-олімпіади)) проводяться з використанням Інтернет / Інтернет-технологій та спеціально створеного для цієї мети програмного забезпечення. Починаючи з 1998 року, щорічно на сайті *http://www.olymp.vinnica.ua*, що належить до нашого освітнього порталу, проводяться Всеукраїнські Інтернет-олімпіади з інформатики, які отримали назву NetOI. Учень, який бажає взяти участь в такій олімпіаді, реєструється на сайті, завдання розміщуються в Інтернеті та автоматично розсилаються зареєстрованим учасникам, які їх розв'язують самостійно, маючи можливість багаторазової on-line перевірки на авторському тесті, що входить до умови задачі. Це виключає неалгоритмічні помилки введення-виведення, що завдають багато прикростей на інших олімпіадах з інформатики. Коли задача розв'язана, учасник надсилає її один раз спеціально оформленим електронним листом чи через веб-форму на офіційну перевірку, після якої зміни до підсумкової таблиці не вносяться, але учасник може самостійно провести перевірку в *on-line* режимі на повному наборі тестів, що виключає потребу в апеляції. Журі має можливість відповідати на питання щодо уточнення умов задач в форумі олімпіади (*http://forum.olymp.vinnica.ua*) та в реальному часі в чат-консультаціях (*http://www.vinnica.ua/netoi*), графік яких учасники отримують разом з умовами задач туру. Фінальний тур проводиться за аналогічною схемою, але вже в реальному часі. Учасники збираються в регіональних центрах проведення олімпіади (як правило, в обласних інститутах удосконалення вчителів) і виконують завдання під наглядом представників оргкомітету та журі. З 2002 р. олімпіади мають офіційний статус, проходять за наказом МОН України, а їх переможці отримують запрошення на 4-й етап Всеукраїнської олімпіади школярів з інформатики поза квотою своїх регіонів. Система проведення олімпіади — складний програмний продукт, розміщення якого в мережі неможливе без наявності власної технічної площадки, жоден комерційний хостинг (не говорячи вже про безкоштовні) не може надати подібних послуг через потребу посилених заходів мережної безпеки, адже система в автоматичному режимі компілює та запускає на виконання надісланий учасником програмний код, а він може виявитися деструктивним. На сайті розміщено також постійно діючу систему *on-line* перевірки задач з інформатики, що дозволяє організовувати різного роду змагання, навчально-тренувальні збори та підготовку до олімпіад. Цією можливістю давно користуються в різних регіонах України та близького зарубіжжя (сайт має, крім української, й російськомовну підтримку). Слід відмітити, що подібних on-line систем перевірки задач з інформатики в Інтернеті є зовсім небагато. В українському сегменті на момент написання статті — жодної, а ті, що є в мережі, як правило, англомовні і орієнтовані в основному на студентську молодь.

На сайті також розміщені повні архіви всіх раніше проведених олімпіад та повні архіви всіх всеукраїнських олімпіад з інформатики, величезна кількість інших матеріалів, зокрема, регіональних, які, як правило, мало відомі за межами регіонів, де відбувалися олімпіади, матеріали всеукраїнських турнірів юних інформатиків.

• Інтерактивна on-line система перевірки знань *http://test.edu.vn.ua*.

Призначена для перевірки знань з базових предметів шкільного курсу та готовності до зовнішнього незалежного оцінювання. Вчитель може, використовуючи інструменти системи, розміщувати тестові завдання, створювати групи із зареєстрованих учнів, призначати групі тестовий набір, проводити тестування групи, отримувати результати. Система збирає статистичні дані на кожного учня для кожного тестового завдання тесту в цілому, що дозволяє не лише оцінювати навчальні досягнення учнів, а й якість самих тестових завдань. Після використання тесту вчитель може перевести його в режим вільного загального доступу.

• Інтерактивна система підтримки життєдіяльності навчального закладу *http://ios.eu.vn.ua* (створена на основі придбаної в компанії РООС (Росія) програми «NetШкола»). З дозволу та в співпраці з розробниками власними силами проведено локалізацію системи українською мовою та адаптацію до українського освітнього законодавства, створено додаткові модулі, що суттєво розширюють можливості системи. Система дозволяє багатьом установам освіти користуватися єдиною базою даних, в якій для кожної установи виділено свій сегмент. Таким чином можливо побудувати спільне ІОС регіону (району, міста, області), яке автоматизує організацію навчального процесу (ведення електронних журналів, всієї шкільної документації, комунікацію з батьками та учнями). Доступ до IOS організовано через мережу Інтернет за технологією VPN, при цьому вона доступна з будь-якого комп'ютера, що підключений до Інтернету; передбачається «клонування» системи на інші навчальні заклади міста та області за мірою їх готовності до використання. Використовуючи IOS, ФМГ № 17 та інші навчальні заклади регіону:

— адміністрація закладу отримує можливість вести всю службову документацію та генерувати всі передбачені нормативними документами звіти органам управління з можливістю їх переносу на паперові носії;

— адміністрація закладу отримує можливість контролювати навчальний план, розклад, педагогічне навантаження вчителя;

— вчителі отримують можливість вести електронний журнал, створювати навчальні курси для дистанційної підтримки традиційних форм навчання, організації самостійної роботи учнів та її оцінювання, листування з учнями та батьками засобами системи;

— вчитель, маючи обладнане комп'ютерним модулем робоче місце, має доступ не лише до ІОС, а й до Інтернету, отримує можливість використовувати на уроках навчальні модулі, а також, використовуючи проектор або демонстраційний телевізор чи монітор, проводити мультимедійні уроки;

— учні отримують можливість контролювати свої навчальні досягнення, виконувати завдання в межах проходження навчального курсу, що створений вчителем, спілкуватися з вчителями в межах системи;

— батьки отримують можливість контролювати навчальні досягнення учня через Інтернет, контролювати обсяги домашніх та індивідуальних завдань, спілкуватися з вчителями та адміністрацією закладу.

Ще однією складовою реалізації концепції є створення системи електронного документообігу та колективної роботи з документами — «Документ-освіта» *http://vmuodoc.edu.vn.ua* (власна розробка, з активним залученням учнів).

Система забезпечує:

— роботу з документами через веб-інтерфейс, що не потребує спеціалізованої клієнтської частини;

— розмежування прав користувачів, можливість оперативного розміщення вихідних документів відправником та їх реєстрацію;

— доступ отримувачів до вхідних документів, їх реєстрацію, збереження на локальному комп'ютері, друк;

— організацію контролю за виконанням документів, веденням та збереженням архівів, пошуком документів в архівах, отриманням звітів про проходження документів;

— обмін оперативними повідомленнями між користувачами системи та розсилання e-mail за зовнішніми адресами.

Створення апаратної платформи. Апаратна концепція реалізується на базі власного вузла Інтернету, який було створено ще в 1996 році на кошти гранту, отриманого за перемогу в конкурсі проектів МФ «Відродження». Вузол обслуговується та адмініструється власними силами з активним залученням школярів. У 2002 році відповідно до рішення виконкому міської ради на базі вузла було створено Вінницький міський центр дистанційної освіти, який забезпечує школам міста доступ до Інтернету.

З метою реалізації концепції в гімназії завершено розбудову локальної мережі, що об'єднує всі навчальні приміщення та кабінети адміністрації, в усіх приміщеннях є комп'ютери з доступом як до ресурсів ІОС, так і до інших ресурсів Інтернету, суттєво розширено канальні та серверні потужності вузла PMG17.

Залучення учнів до процесу реалізації концепції

Протягом багатьох років ми залучаємо учнів гімназії до розв'язання задач адміністрування мережі та створення ресурсів порталу. Прикладом можуть бути учнівські роботи, представлені на порталі *http://wwew.pmg17.vn.ua* (сайт фізико-математичної гімназії № 17 м. Вінниці), *http://web.pmg17.vn.ua* (сайт гімназійної веб-студії). Учні оволодівають сучасними технологіями веб-програмування (php, perl, JavaScript та ін.), завдяки чому неодноразово перемагали на обласних та Всеукраїнських конкурсах відповідного спрямування.

Література

1. Про Національну доктрину розвитку освіти: Указ Президента України від 17.04.2002 р. № 347 // Освіта України. — 2002. — № 33. — С. 4—6.

2. Стратегія реформування освіти в Україні: Рекомендації з освітньої політики. — К.: «К.І.С.», 2003. — 296 с.

3. *Аванесов В. С.* Научные проблемы тестового контроля знаний. — М., 1994. — 135 с.

4. *Аванесов В. С.* Математические модели педагогического измерения. — М.: Исслед. центр проблем качества подготовки специалистов, 1994. — 26 с.

5. *Лужецький В. А., Білик О. О.* Підходи щодо створення автоматизованих інформаційних систем сфери освіти // Прогресивні інформаційні технології в науці та освіті: Зб. наук. пр. / Вінниц. соціально-екон. ін-т Ун-ту «Україна». — Вінниця, 2007. — С. 8—12.

6. *Пасіхов Ю. Я.* З досвіду створення гімназійного вузла Інтернет та використання його можливостей в навчальному процесі // Матеріали першої Міжнародної науково-методичної конференції «Інтернет-Освіта-Наука-98». — Вінниця, 1998. — С. 44—54.

7. *Пасіхов Ю. Я.* З досвіду організації та адміністрування олімпіад школярів України та зарубіжжя з використанням можливостей Інтернету // Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Актуальні питання комплексної освіти в спеціалізованих середніх навчальних закладах з підвищеними вимогами до викладання природничо-математичних дисциплін. — О., 1999. — С. 178—187.

8. *Пасіхов Ю. Я.* Впровадження дистанційної підтримки традиційних форм освіти в середній школі // ІНТЕРНЕТ-ОСВІТА-НАУКА-2006: П'ята Міжнар. конф. ІОН-2006, 10—14 жовт., 2006: Зб. матеріалів конф. — Вінниця, 2006. — Т. 1. — С. 438—447.

9. Всеукраїнські Інтернет-олімпіади NetOI / Ю. Я. Пасіхов, Г. І. Непомнящий, Г. П. Кравець, К. К. Симонов, І. М. Порубльов. — Вінниця: УНІВЕРСУМ, 2004.

Ю. Я. ПАСІХОВ,
заст. директора фізико-математичної гімназії № 17 м. Вінниці, завідувач лабораторії інформаційних і комунікаційних технологій, заслужений вчитель України.

Удк 371.315:004.032.6

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОБЛЕМ ФОРМУВАННЯ ПРЕДМЕТНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ УЧНІВ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ФІЗИКИ

У статті висвітлено основні результати аналізу сучасних психолого-педагогічних досліджень компетентнісно орієнтованих підходів у навчально-виховному процесі. Окреслено певні проблеми формування предметних компетентностей учнів основної загальноосвітньої школи. Пропонуються шляхи вирішення цих проблем в процесі навчання фізики.

The basic results of analysis of modern psychological and pedagogical researches of competency oriented approaches in educational process are introduced in the report. Certain problems of basic general school students' subject competency forming are outlined. Ways of overcoming of these problems in the process of studies physics are proposed.

Компетентнісний підхід в освіті розглядається як своєрідна умова розвитку у людини здатності ефективно діяти поза навчальними ситуаціями, ефективно і результативно використовувати знання, які отримані в процесі навчання.

Компетентнісно орієнтоване навчання передбачає акцент на індивідуальні підходи, побудову власних траєкторій навчання, розвиток особистості. Сьогодні загальноприйнятою в освіті вважається система компетентностей, що має ієрархічну структуру, рівні якої складають ключові, загальногалузеві та предметні компетентності.

Як показує аналіз психолого-педагогічних джерел, кількість спеціальних компетентностей, формування і розвиток яких досліджують вітчизняні та зарубіжні вчені-педагоги, перебільшує кількість ключових (універсальних). Однією з причин є те, що кількість спеціальних компетентностей відповідає різноманіттю видів діяльності, в які включається людина протягом життя, та галузей знань, які вона опановує. Так, науковцями досліджувалась життєва компетентність старшокласника (Л. В. Сохань, І. П. Ящук), професійна компетентність фахівця (Л. В. Бєляєва, В. В. Баркасі, С. О. Демченко, О. М. Онаць), психологічна компетентність викладача (О. В. Полуніна), математична компетентність школярів (Л. І. Зайцева, Н. Г. Ходирєва, С. А. Раков), геометрографічна компетентність студентів (Е. Г. Юматова), іншомовна компетентність студентів (І. А. Смольяннникова, О. А. Палій), екологічна компетентність майбутнього вчителя (Л. В. Панфілова), читацька компетентність учнів (Е. Т. Соломка) та багато інших.

Дані, отримані нами, свідчать про те, що дослідження процесу формування спеціальних компетентностей учнів загальноосвітніх навчальних закладів хоч і є актуальним, проте мало вивченим. Процес, методика, технологія, засоби формування компетентностей учнів в процесі навчання предметів природничо-математичного циклу, за виключенням галузі технології, майже не вивчаються.

Ми поділяємо думку, що предметна компетентність учня основної школи — це здатність і готовність застосовувати на практиці при розв'язуванні реальних життєвих задач предметні знання та успішно продовжувати навчання у даній предметній області. Вважаємо, що вирішення проблем формування предметної компетентності учнів основної школи залишається актуальним завданням загальної середньої освіти.

Предметних (або спеціально предметних) компетентностей учень набуває в процесі вивчення певного предмета протягом навчального року або ступеня навчання. Предметні компетентності учнів ґрунтуються на загальнопредметних і є стадіями, рівнями їх набуття.

У свою чергу, загальнопредметних (або загальногалузевих) компетентностей учень набуває впродовж вивчення того чи іншого предмета або освітньої галузі протягом всього терміну навчання.

Наприклад, загальнопредметними компетентностями з фізики є здатність:

— пояснювати фізичні явища, використовуючи специфічну мову й терміни;

— проводити експерименти з фізичними явищами, досліджувати фізичні процеси;

— переносити знання з фізики в інші науки, використовувати їх в галузі технологій;

— розв'язувати теоретичні та прикладні проблеми, пов'язані з реальними ситуаціями в світі, використовуючи фізичні знання тощо.

Кожна предметна компетентність формується в учня в процесі організованої навчально-пізнавальної діяльності. Навчально-пізнавальна діяльність полягає у виконанні певної системи дій, спрямованих на виявлення суті навчального матеріалу та опанування методів його використання.

У дослідженнях предметної компетентності учнів загальноосвітніх шкіл спостерігається тенденція до розгляду загальнопедагогічних проблем і лише в незначній мірі — методичних аспектів навчання.

Порівнюючи підходи вчених-педагогів до методики формування компетентностей учнів, бачимо різні визначення складників компетентностей. Проте спільним, на наш погляд, є виокремлення змістовно-процесуального, мотиваційно-ціннісного і рефлексивного компонента. Частіше за все увага вчених і вчителів-практиків зосереджується на розвитку змістовно-процесуального компонента. Недостатньо розробленою залишається методика формування предметних компетентностей учнів з акцентом на мотиваційно-ціннісний компонент.

Вважаємо, що гуманітаризація фізичної освіти повинна подолати вузькофункціональну уяву про мету вивчення фізики. Крім реалізації освітніх стандартів, метою фізичної освіти є формування в учнів гуманістичної орієнтації, тобто цілісної уяви про місце фізичного знання в системі культури та його цінності для самореалізації людини в сучасному світі. Акцентування уваги на використанні фізики в інших науках і техніці, знайомство із зразками працелюбності і безкорисливості вчених, обговорення з учнями питань про відповідальність вчених перед людством формують позитивне ставлення школярів до навчальної діяльності, потребу в засвоєнні предметних знань, пізнавальний інтерес. Отже, гуманістична орієнтація навчання створює умови для розвитку мотиваційної компоненти предметної компетентності учнів.

Компетентнісний підхід до навчання кожної окремої дисципліни вимагає певних змін в організації навчального процесу цієї дисципліни. Ми поділяємо думку дослідників, які вважають компетентнісний підхід такою організацією освітнього процесу, яка базується на наданні суб'єктові діяльності (навчальної, пізнавальної, ігрової та інших) права на самореалізацію, набуття та реалізацію своєї компетентності. Переважною більшістю дослідників компетентнісно орієнтованого навчання найкращою формою та засобом формування компетентності визнається спеціально орієнтована навчальна діяльність, створення і розв'язання специфічних навчальних ситуацій. В основі компетентнісного підходу лежать активні методи навчання: метод реальних ситуацій, створення проблемних ситуацій, метод «Портфоліо».

Завершених досліджень формування предметних компетентностей учнів в процесі навчання фізики загальноосвітньої школи і дотепер невелика кількість. Вчені віддають перевагу дослідженню ключових (О. П. Мерзлякова, Т. В. Осенчугова, Н. І. Сорокіна) і загальнопредметних (Т. В. Альнікова) компетентностей в процесі навчання фізики, деяким аспектам інформаційної грамотності і компетентності учнів при навчанні фізики (А. В. Худякова).

У поглядах на проблему формування предметної компетентності учнів основної школи з фізики ми виділяємо наступне: методика навчання фізики має забезпечувати розвиток здатності учнів застосовувати отримані в школі знання й уміння в життєвих ситуаціях, а також створювати умови для подальшої навчальної діяльності в галузі фізики.

У дослідженні функціональної грамотності з природничих дисциплін, яку можна вважати мінімальним рівнем компетентності, Міжнародною організацією економічного співробітництва і розвитку ОЕСР (OECD — Organization for Economic Cooperation and Development) оцінюється готовність до самостійного життя учнів в суспільстві, які здобули обов'язкову загальну освіту. Дослідження PISA-2006, переважна більшість завдань якого була зорієнтована на оцінювання рівня природничої грамотності, визначило не рівень освоєння шкільних програм, а дало оцінку здатності учнів застосовувати знання і уміння в навчальних ситуаціях, які максимально наближені до життєвих.

На нашу думку, про досягнення учнями більш високого рівня предметної компетентності в процесі навчання фізики свідчить більший ступінь самостійності при виконанні завдань, більш широке коло залучених при пошуку рішення інформаційних ресурсів різного типу, демонстрація навичок використання комп'ютерних технологій та програмних продуктів для розв'язування завдань з фізики.

Позитивно впливає на розвиток предметної компетентності учнів виконання завдань, тексти яких містять графіки і діаграми, описи, пояснення, аргументацію, інструкції, схеми, таблиці. Під час виконання таких завдань від учнів вимагається вміння демонструвати інтерпретацію текстів, рефлексію, віднаходити інформацію, корисну для розв'язування та висновків.

Як показує аналіз результатів вітчизняних і зарубіжних психолого-педагогічних досліджень компетентнісно орієнтованого навчання, здійснення пізнавальної діяльності в навчальному середовищі, де використовуються технічні засоби, які реалізовані за допомогою апаратних і програмних засобів мультимедійних технологій, може сприяти створенню компетентнісно орієнтованих навчальних ситуацій і позитивно впливати на формування компетентності учня.

Результат проведеного нами дослідження сучасного стану використання засобів мультимедійних технологій навчання фізики в основній школі дозволяє стверджувати, що підвищення інтересу учнів до розвитку науки та новітніх технічних розробок, який ініціює використання мультимедійної техніки в навчально-виховному процесі, позитивно впливає на формування мотиваційно-ціннісної компоненти предметної компетентності учня.

Проведений нами аналіз дозволив виділити характерні ознаки засобів мультимедійних технологій, а саме:

— інформаційна насиченість: можливість об'єднання інформації, представленої в різних формах (текст, звук, графіка, відео, анімація), інтерактивний режим роботи з інформацією, зручність опрацювання різних видів інформації;

— реальність дійсності, що зображується: показ явищ у розвитку та динаміці, виразність, емоційна насиченість, багатство зображувальних прийомів.

Перелічені вище властивості технічних засобів навчання дозволяють створювати ефективні практико-орієнтовані ситуативні задачі, активне використання яких в навчальному процесі сприяє формуванню предметних компетентностей учнів. Наприклад, використання

— інтерактивних комп'ютерних моделей для демонстрації протікання фізичних процесів при змінних початкових умовах;

— відеозаписів та анімацій фізичних явищ, які не можуть бути відтворені протягом уроку;

— енциклопедій на цифрових носіях та ресурсів Інтернет, які заповнюють прогалини у доступній в наш час учням науково-популярній літературі.

Література

1. *Пінчук О. П.* Деякі аспекти підвищення якості самостійної пізнавальної діяльності учнів у процесі компетентнісно орієнтованого навчання / О. П. Пінчук // Теорія та методика вивчення природничо-математичних і технічних дисциплін : зб. наук.-метод. пр. — Рівне : Волинські обереги, 2009. — С. 122—127.

2. *Пінчук О. П.* Дидактичний аспект проблеми визначення мультимедіа в освіті / О. П. Пінчук // Наукові записки : зб. наук. пр. / Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. — К. : Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2006. — Вип. LXIV (64). — С. 178—184.

3. *Пінчук О. П.* Дидактичний потенціал мультимедійних технологій у загальноосвітній школі / О. П. Пінчук // Наукові записки : зб. наук. пр. / Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. — К.: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2007. — Вип. LXVI (66). — С. 155—164.

О. П. ПІНЧУК,
молодший науковий співробітник Інституту інформаційних технологій і засобів навчання АПН України, учитель-методист.

УДК 372.853:53

НАВЧАННЯ УЧНІВ СКЛАДАННЯ І РОЗВ'ЯЗАННЯ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ З ВИКОРИСТАННЯМ ФІЗИЧНОГО МАТЕРІАЛУ ЕКОКУЛЬТУРНОЇ СПРЯМОВАНОСТІ

Важливою метою дидактичного процесу з фізики загальноосвітньої школи є формування екологічної культури учнів. У статті розглянуто приклади використання фізичного матеріалу екокультурної спрямованості у формуванні екологічної культури особистості засобами навчання розв'язання і складання фізичних задач.

The important purpose of the physic's didactic process is formation of ecological culture of pupils of a secondary school. The examples of using a physical material of ecocultural orientation and their possibilities in education the ecocultural competent person in the course of training of pupils to the decision and drawing up physical problems are considered in the article.

Перш за все обдаровані діти відрізняються високою креативністю, якій властива самостійна постановка і розв'язання пізнавальних проблем. Висока креативність повинна підтримуватися відповідним рівнем пізнавального інтересу та емоційних переживань. У навчанні фізики розвиток креативності обдарованих дітей може відбуватися засобами самостійного складання і розв'язування задач за різними пізнавальними напрямками, серед яких особливе місце за своїм потенціалом можливостей щодо розвитку пізнавального інтересу та емоцій особистості займає екокультурний напрямок.

У «Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти» наголошується, що головна мета освітньої галузі «Природознавство» полягає в забезпеченні розвитку учнів завдяки засвоєнню ними методів наукового пізнання, засвоєнню основних законів природи, формуванню вмінь застосовувати набуті знання і приймати виважені рішення в природокористуванні. Особливе місце в досягненні освітніх цілей відводиться фізиці, до змісту якої обов'язково мають входити теми, що пов'язані з «...роллю фізичних знань в житті людини та суспільному розвитку». Державні стандарти фізичної освіти містять вимоги і щодо рівня загальної наукової та культурної підготовки учнів. У процесі навчання фізики учні повинні отримати уявлення про історичний характер знань з фізики, сфери застосування фізичних знань, про фізичну картину світу, в тому числі, вони повинні знати параметри нормальних умов життєдіяльності людини та її безпеки, допустимих норм забруднення природного середовища та методів його очищення; вміти застосовувати набуті знання в різних сферах життєдіяльності [3, 40].

У цьому сенсі варто звернути увагу на системність і багатогранність змісту фізичної освіти та його наукову і культурно-історичну спрямованість. Вивчення прикладних питань механіки, гідродинаміки, молекулярної фізики, термодинаміки, електродинаміки, елементів атомної, квантової та ядерної фізики, аналіз історії розвитку культури, науки і техніки, обговорення наслідків антропогенного втручання до природи і т. д. створюють умови для формування загальної культури і наукового світогляду учнів та уявлень про фізичну картину світу, їхнього особистісного екокультурного сприйняття оточуючого світу.

Окрім того, унікальними особливостями навчання фізики є використання широкого комплексу видів навчально-пізнавальної діяльності учнів: наочні спостереження явищ природи, виконання практичних і теоретичних досліджень, експериментальних дослідів, робота з численними вимірювальними приладами, таблицями, графіками, складання та розв'язання фізичних задач, виконання учнівських проектів тощо. Такий широкий спектр форм організації навчального пізнання припускає досягнення встановленої державними програмами для загальноосвітніх навчальних закладів головної мети навчання учнів фізики — «...формування фізичних знань, наукового світогляду і відповідного стилю мислення, екологічної культури, розвитку експериментальних умінь, дослідницьких навичок, творчих здібностей» [8, 4].

Таким чином, державними документами встановлюється важливість ролі і місця екологічного аспекту культурно-історичного компонента змісту фізичної освіти. Формування екологічної культури учнів загальноосвітньої школи передбачає «...екологічну освіту, <...> екологічне виховання та формування екологічних переконань, свідому екологічну діяльність» [10, 6] особистості у творчому перетворенні та захисті природи, окреслює коло питань, що забезпечують реалізацію екокультурної функції фізичної освіти.

Сучасні методисти, педагоги і науковці багато уваги приділяють актуалізації екокультурної функції навчально-виховного процесу з фізики. У наукових публікаціях П. С. Атаманчука, Е. М. Діндилевича, О. М. Кравченка, В. С. Лук'янця, О. Я. Мороза, О. М. Ніколаєва, Л. В. Озадовської, П. І. Самойленка, А. І. Павленка, Н. Пахомової, К. Ріхтера, М. І. Садового, В. О. Скребця, В. Д. Шарко, А. Ендреса та ін. висвітлюються шляхи формування екологічної культури учнів в школі. Дисертаційні дослідження О. А. Васильєвої, Г. Г. Глухової, К. Ж. Гуза, Н. П. Єфіменко, Л. М. Маркович, О. П. Матеюк, Н. О. Шевченко, Р. Н. Щербакова та інших дослідників розкривають дидактичний потенціал екокультурної функції освіти в цілому і фізичної освіти зокрема.

У контексті освітніх завдань навчання, виховання і розвитку екологічно грамотної особистості культурно-історична складова змісту фізичної освіти охоплює добір таких методів, форм і засобів навчання, які орієнтують навчально-пізнавальну діяльність учнів на розуміння головних і «...взаємопов'язаних аспектів проблеми «людина і природа»: енергетичний (методи раціонального використання природних ресурсів), природоохоронний (методи запобігання антропогенних порушень, відновлення природної рівноваги)» [2, 47–48], культуро-діяльнісний (методи відтворення гармонії у відносинах людини і природи). Одним з таких ефективних засобів є навчання учнів розв'язання і складання фізичних задач з використанням матеріалу екокультурної спрямованості. Отже, метою даної статті є розкриття можливостей формування екологічної культури школярів засобами навчання розв'язання і складання фізичних задач на прикладах використання фізичного матеріалу екокультурної спрямованості.

Закони фізики відкривають таємниці природи, пізнання яких приводить учнів до розуміння складного взаємоіснування та взаємовпливу людини й довкілля, до усвідомлення культурно-історичної еволюції людства. Таким чином, вчитель фізики навчає учнів законам природи та методам їх використання, практично реалізуючи культурно-історичні можливості навчання шкільної фізики. А фізика як навчальна дисципліна виконує одне з головних завдань сучасної педагогічної науки — сприяє формуванню екокультурної свідомості та відповідного мислення учнів, глибокому усвідомленню майбутніми громадянами України тих складних процесів, що відбуваються у природному середовищі й соціумі. Вчителі фізики та вчені-методисти (А. К. Атаманченко, Н. П. Афанасьєва, З. М. Беджанова, Е. М. Браверман, Т. А. Веретеннікова, С. Г. Гільміярова, В. М. Дуков, В. І. Елькін, А. Євтушок, Е. Т. Ізергін, Т. Г. Іксанова, О. Комаренко, Л. І. Кондратьєва, Н. М. Коршак, В. П. Кравченко, С. В. Лапаєнко, Г. П. Міліневський, В. В. Мягченков, Л. Ф. Мягченкова, Т. Одинець, І. В. Попов, Я. М. Ройко, М. І. Садовий, С. А. Тихомирова, Е. А. Турдікулов, Е. Хакімов, О. Цельова, В. Д. Шарко та ін.) на сторінках журналів «Фізика та астрономія в школі», «Фізика в школах України», «Физика в школе», газети «Фізика» впродовж багатьох років пропонують різноманітні матеріали, які можна використовувати на уроках фізики з метою формування екокультурної свідомості і відповідного стилю мислення учнів 7—11-х класів на прикладах корисного та некорисного для людини і природи втручання наукового знання до еволюційних процесів нашої планети.

Проаналізувавши науково-методичні роботи, публікації в періодичній пресі, ми дійшли висновку, що основними напрямками навчального матеріалу і проблем екокультурного характеру, що розглядаються і обговорюються в процесі навчання фізики, є:

— вплив розвитку фізики і техніки на оточуюче людину середовище;

— вплив досягнень фізики на сталий розвиток суспільства шляхом вирішення екологічних проблем;

— розвиток фізики і техніки та екологічна безпека;

— глобальні кризи та їх антропогенна природа;

— фізика і здоров'я людини;

— вплив фізичної науки на розвиток культури виробництва та вимог техніки безпеки;

— досягнення фізичної науки і розвиток безпечних технологій.

Наведені приклади основних напрямків навчального матеріалу і проблем екокультурного характеру вчитель фізики може використовувати як при вивченні нового матеріалу, так і в процесі навчання учнів складання і розв'язання фізичних задач. Розглянемо такі приклади при навчанні учнів уміння складати і розв'язувати кількісні та якісні задачі.

• ***Вплив розвитку фізики і техніки на оточуюче людину середовище*** можна проілюструвати учням при відповідях на якісні та кількісні задачі.

«Дифузія» (7-й клас)

— Які фізичні явища є причиною розповсюдження забруднення повітря, води, ґрунту? Назвіть причини забруднення оточуючого середовища тієї місцевості, де ви вчитеся. Назвіть джерела забруднення екологічно небезпечних індустріальних районів України (Запоріжжя, Кривій Ріг, Дніпродзержинськ, Донецьк і т. д.).

— Складіть якісні задачі, в яких проявляється явище дифузії як корисне або некорисне для життя людини.

«Атмосферний тиск» (8-й клас)

— Як забруднення повітря впливає на атмосферний тиск? Чи може атмосферний тиск бути нормальним перед дощем? Якщо так, то за яких умов?

«Перетворення одного виду механічної енергії в інший»

— У кожному місті є теплоелектроцентралі (ТЕЦ), які відповідають за постачання електроенергії та гарячої води в наші оселі, школи, підприємства тощо. ТЕЦ працюють на вугіллі, газі або мазуті. При згорянні палива в атмосферу через трубу виходять продукти згоряння у вигляді диму. Чому такі труби будують високими? Чи змінюється механічна енергія часток диму, коли дим опуститься на поверхню землі?

«Електричне поле», «Електричний струм», «Електричний струм у різних середовищах» (9-й клас)

— Американський фізик Б. Франклін, досліджуючи властивості блискавки, ще у XVIII столітті висловив ідею щодо створення громовідводу. Першим створив і використав громовідвід французький священик Ж. Ф. Далібар. Яке фізичне явище передбачили і використали науковці при конструюванні громовідводу?

— Який вплив мають громовідводи на оточуюче середовище? Чи відрізняються сучасні громовідводи від тих, що були створені у XVIII столітті?

— При газовому розряді в газорозрядних трубках виникає свічення газу. Як таке явище використовується при освітленні приміщень? Які гази і сполуки використовуються в сучасних газорозрядних лампах? Чи є безпечним для ока людини освітлення за допомогою газорозрядної лампи? Чи відрізняються між собою освітлення приміщень за допомогою газорозрядної лампи і за допомогою лампи розжарювання? Розглянути якісну та економічну сторони питання.

«Автоколивання» (10-й клас)

— Сучасні методи вимірювання часу допускають визначення часу з точністю до $1 \cdot 10^{-9}$ с, що дає можливість комп'ютеру встановлювати координати суден в океані з абсолютною похибкою $\pm 50i$. Яку б абсолютну похибку робив комп'ютер при точності вимірювання часу 1 с?

— Як сучасні методи вимірювання часу впливають на розвиток комп'ютерної техніки та нанотехнологій?

«Статика»

— З появою новітніх будівельних матеріалів з'явилось багатоповерхове будівництво. Як при цьому змінилось конструювання і будівництво опорної (підземної) частини будівель? Які небезпеки зростають для людини на верхніх поверхах таких будівель?

— Як у конструкціях сучасних підйомних кранів виконуються закони рівноваги тіл? Чим сучасні підйомні крани відрізняються від підйомних пристроїв, що використовувались при будівництві Єгипетських пірамід?

— Складіть якісні задачі, для розв'язання яких використовуються закони статики і аналізуються екологічні властивості сучасних будівельних матеріалів.

«Змінний струм» (11-й клас)

— Як будівництво системи ГЕС на Дніпрі (Канівська ГЕС, Київська АГЕС, Дніпрогес та ін.) вплинуло на екологію та кліматичні умови водоймища і навколишніх земель?

«Електромагнітні хвилі»

— У 1899 р. О. С. Попов здійснив бездротовий зв'язок на відстані 640 м. Через три роки на відстані 44 км — для рятування броненосця «Генерал-адмірал Апраксін». Розрахуйте час руху електромагнітної хвилі в обох випадках.

• ***Вплив досягнень фізики у розв'язанні екологічних проблем на сталий розвиток суспільства*** можна використати на таких прикладах:

«Умови плавання тіл» (8-й клас)

— Густина дистильованої води дорівнює 1000 кг/м^3, солоної води — 1030 кг/м^3, нафти — 800 кг/м^3, бензину 700 кг/м^3. Чому виникає небезпека утворення нафтової плівки на поверхні рік, морів, океанів?

— Якщо нафтоналивний танкер потрапить в аварію, то на поверхню води може витекти до 250 000 т нафтопродуктів. Розрахувати, скільки молекул небезпечної речовини потрапить у воду. Прийняти густину нафтопродуктів, рівної густині нафти. Які екологічні проблеми розв'язує сучасне суспільство, що пов'язані з судноперевезенням нафтопродуктів на великі відстані?

— Складіть задачу з використанням в умові властивостей екологічно небезпечних речовин.

«Теплові явища», «Екологічні питання використання теплових машин»

— Агротехнічні прийоми снігозатримання впливають на теплоізоляцію кореневої системи рослин та накопичення й збереження вологості в ґрунті. Які фізичні властивості снігу використовуються в агротехніці?

— Теплота згоряння бензину дорівнює 46,2 МДж/кг, дизельного палива — 42,0 МДж/кг, кам'яного вугілля — 30 МДж/кг, сухих дров — 8,3 МДж/кг, нафти — 46,0 МДж/кг, торфу — 15 МДж/кг. Які з перерахованих видів палива краще використовувати для отримання теплової енергії? Які з них є більш екологічно безпечними?

«Електричне поле» (9-й клас)

— Як при дотриманні правил особистісної гігієни ви уникаєте електризації тіла, одягу, приміщень? Які екологічно безпечні речовини допомагають уникненню електризації в побуті та техніці?

«Джерела електричного струму»

— З чим пов'язані проблеми утилізації використаних гальванічних елементів і акумуляторів?

— У Запоріжжі збудовано когенераційні установки на окремих трубах ТЕЦ, які дозволяють отримувати додатково, крім теплопостачання, ще й електричну енергію. Запропонуйте принципову схему дії такої установки.

— Які екологічно небезпечні джерела електричного струму ви знаєте?

— Які сучасні порівняно екологічно небезпечні методи виробництва електроенергії використовуються для електропостачання вашого рідного краю?

«Екологічні проблеми ядерної енергетики»

— При аварії на ЧАЕС в атмосферу було викинуто приблизно 8 т ядерного палива. Загальна активність викинутих речовин становила $6{,}2 \cdot 10^9$ Кюрі. Розрахуйте кількість ізотопів, що потрапили до атмосфери [4].

— Використовуючи дані про періоди напіврозпаду ізотопів ядерного палива, складіть задачі, враховуючи зміни вмісту радіоактивних речовин у земній атмосфері.

«Магнітне поле»

— Як змінюється положення магнітної стрілки компаса в зонах видобутку вугілля в Україні?

— Чи впливають на екологічні умови життя людини утворення відвалів та наступна переробка відходів у місцевостях видобутку вугілля? Поясніть свою відповідь.

«Штучні супутники Землі» (10-й клас)

— Як утилізація використаних штучних супутників Землі впливає на екологію світового океану та верхнього шару атмосфери?

«Атомна і ядерна фізика» (11-й клас)

— Після Чорнобильської катастрофи суспільство дуже уважно ставиться до виконання вимог техніки безпеки в процесі виробництва електроенергії. Як вимоги суспільства до екології оточуючого середовища впливають на розвиток ядерної енергетики в Україні, Європі, світі?

• ***Глобальні кризи та їх антропогенна природа*** є найважливішими питаннями у формуванні екологічної культури учнів. Дані про глобальні катастрофи можна використовувати при розв'язанні задач з тем:

«Екологічні проблеми ядерної енергетики» (9-ті та 11-ті класи)

— Чи безпечна Чорнобильська зона людині, тваринам, рослинам?

— У скільки разів зменшилася активність радіонукліда $^{131}_{53}I$ через 2 місяці після аварії на ЧАЕС? Період напіврозпаду $^{131}_{53}I$ становить 8 діб [5].

— Складіть задачі з використанням у процесі їхнього розв'язання фізичних даних про наслідки аварії на ЧАЕС.

«Теплові явища», «Молекулярна фізика. Термодинаміка» (8-мі та 10-ті класи)

— Назвіть фізичні явища та результати діяльності людини, які є причиною зменшення концентрації кисню в атмосфері Землі. Як зменшення вмісту кисню в атмосфері впливає на екологічні умови життя людини та існування природного середовища?

— Повний вміст озону в земній атмосфері становить близько 3 млрд т, 90% його міститься в стратосфері на висоті від 15 до 50 км над поверхнею Землі. Температура повітря в атмосфері зростає з висотою завдяки поглинанню озоном сонячної енергії в ультрафіолетовому діапазоні. Озоновий шар, поглинаючи ультрафіолетові промені, захищає людину від небезпечного випромінювання [4]. Яку товщину буде мати шар озону при нормальних умовах

(0°С, $1 \cdot 10^5$ Па), якщо весь озон в атмосфері опустити на поверхню Землі?

— Які помилки техногенної діяльності людини стали причиною зникнення Аральського моря? Проаналізуйте подібність екологічних проблем Аральського та Мертвого морів як наслідків нерозумної діяльності людини щодо використання води річок, що впадають у ці моря.

• ***Фізика і здоров'я людини. Вплив фізичної науки на розвиток культури виробництва та вимог сучасної техніки безпеки на формування культури здоров'я, знань, умінь і потреб у здоровому способі життя.*** Такий матеріал вчитель може використати при вивченні тем:

«Дифузія» (7-й клас)

— Як батьки можуть виявити, палите ви чи ні?

— Лабораторні аналізи показують, що в 1 літрі молока матері, яка палить, міститься 0,5 мг нікотину (до речі, 1 мг нікотину є смертельною дозою для немовляти) [1]. Яке фізичне явище відповідає за розповсюдження нікотину в організмі матері?

«Світлові явища»

— Які вимоги до освітлення робочих приміщень та робочого місця учня вдома ви знаєте?

«Зв'язок фізики з повсякденним життям, технікою і виробничими технологіями»

— Як впливає вологість повітря на безпеку роботи з електричним обладнанням?

«Звук». «Сприймання звуку людиною». «Вплив звуку на живі організми» (8-й клас)

— Допустимі межі сили звуку в різних умовах становлять 45–85 дБ. У разі постійного шумового фону 70 дБ виникає розлад ендокринної й нервової систем; 90 дБ — порушується слух; 120 дБ — з'являється фізичний біль, який стає нестерпним [6]. Назвіть причини виникнення шуму.

— Які сучасні екологічно безпечні методи боротьби з шумом ви знаєте?

— Які фізичні властивості ультра та інфразвуку негативно впливають на самопочуття людини, а які властивості використовуються на користь людини?

«Умови плавання тіл»

— Яких правил поведінки необхідно дотримуватися при купанні?

«Електричний струм», «Безпека людини під час роботи з електричними приладами і пристроями», «Теплові машини», «Холодильні машини» (9-й клас)

— Як необхідно починати знайомство та роботу з електровимірювальною технікою, електроприладами, побутовою електротехнікою? Яких вимог техніки безпеки при цьому необхідно дотримуватись?

— Складіть задачі з використанням в умовах паспортних даних та фізичних характеристик електровимірювальної техніки, електроприладів, побутової електротехніки.

«Рідкі кристали та їх властивості» (10-й клас)

— Холестерин — рідкий кристал. При визначеній концентрації холестерину в кровоносній системі він підтримує циркуляцію крові. Як впливає холестерин на здоров'я людини при підвищеній концентрації в крові?

«Вплив електричного поля на живі організми» (11-й клас)

— За яких умов у повітрі утворюється підвищений рівень іонів? Чи корисне таке явище для здоров'я людини? Поясніть свою відповідь.

— Складіть задачі, при розв'язанні яких необхідно розраховувати концентрацію іонів у повітрі (вплив електризованого повітря на стан здоров'я людини та інших живих організмів).

«Електромагнітні хвилі»

— Озоновий шар поглинає ультрафіолетові промені у діапазоні від 240–320 нм [10]. Визначіть діапазон енергії озонового шару.

— Використовуючи шкалу електромагнітних хвиль, складіть задачі на розрахунки енергії електромагнітних хвиль та проаналізуйте вплив властивостей обраного вами діапазону хвиль на людину та живі організми.

«Радіоактивність»

— Чому радіоактивний ізотоп йоду ${}^{131}_{53}I$ швидко накопичується в організмі людини? Як він впливає на здоров'я людини [5]?

— Використовуючи додаткову літературу та інші інформаційні джерела, виконайте дослідження щодо визначення впливу різноманітних радіоактивних ізотопів на здоров'я людини та медичних методів виведення їх із організму.

· ***Досягнення фізичної науки і розвиток безпечних технологій*** варто використовувати при розв'язанні задач з наступних тем:

«Теплові двигуни» (8-й клас)

— Як відрізняються ККД першої парової машини і сучасної, якщо вони виконують однакову роботу? Чому ККД машин, що працюють на екологічно безпечному паливі (повітря, електрика тощо) менше, ніж тих, що працюють на бензині, дизпаливі, газі?

«Виробництво, передача та використання енергії електричного струму» (9-ті і 11-ті класи)

— Вітросилові пристрої привернули увагу вчених та інженерів як найекологічніше устаткування. У чому екологічність таких установок? Як в сучасних умовах життя використовуються вітросилові пристрої?

— Екологічність сонячної енергії не викликає сумнівів. Сонячне тепло, його акумулювання, перетворення в теплову та електричну енергію знайшли використання в конструкціях геліоелектростанцій. В Ізраїлі з березня до листопада в оселі постачається тепла вода, яка нагрівається геліоустаткуванням. Розрахуйте потужність такого обладнання, якщо вода в трубах завжди 80°.

— Перша сонячна електростанція потужністю 5 МВт збудована в Криму. Пара, утворена в котлі після нагрівання води масою 25 т, має температуру 225°С і тиск 2,6 МПа. Яку кількість теплоти отримали вода і пара [9]?

«Квантові властивості світла» (11-й клас)

— Рентгенівські промені широко використовуються в медицині. Немає жодної людини, яка б не проходила обстеження рентгенівськими променями. Яку енергію мають рентгенівські промені, якщо довжина їх хвилі лежить у діапазоні від $8 \cdot 10^{-8}$ м?

— Яке з двох видів обстежень — ультразвукове або рентгенівське — є найбільш екологічно небезпечним для здоров'я людини? Поясніть свою відповідь.

— Оцінити (за законом Стефана-Больцмана) густину потоку енергії електромагнітного випромінювання тіла людини [5].

— Чи є використання людиною квантових властивостей світла в новітніх технологіях екологічно безпечним?

Висновки. При використанні запропонованого нами матеріалу екокультурного характеру в навчанні учнів уміння складати і розв'язувати фізичні задачі формуються креативне мислення і важливі елементи екологічної культури особистості. Учні починають розглядати фізику в усій її різнобічності, наукових формах і соціокультурних проявах, що дозволяє їм орієнтуватись у складних проблемах сучасності. Розглянуті приклади використання навчального матеріалу екокультурного характеру демонструють учням значущість розвитку наукового знання, в тому числі фізичної науки, в контексті еволюційних процесів світової екології і можуть бути покладені в основу учнівських навчальних проектів.

Література

1. *Атаманченко А. К.* Цикл мини информаций для уроков на тему «Физика, здоровье, окружающая середа и мы» // Физика в школе. — 1995. — № 2. — С. 21–25.
2. *Гильмиярова С. Г., Иксанова Т. Г., Изергин Э. Т.* Формирование экологического мышления школьников // Физика в школе. — 1991. — № 1. — С. 46–50.
3. Державний стандарт базової і повної середньої освіти // Інформаційний збірник МОН України. — 2004. — № 1–2. — 64 с.
4. Деякі відомості про Чорнобильську катастрофу / А. Євтушок, О. Комаренко, Н. Коршак, Т. Одинець, О. Цельова // Фізика та астрономія в школі. — 1997. — № 3. — С. 27–29.
5. *Кравченко В. П.* Задачі з гуманітарним змістом // Фізика та астрономія в школі. — 2002. — № 4. — С. 8–11.
6. *Лапаєнко С. В.* Вплив шуму на здоров'я людини // Фізика та астрономія в школі. — 2000. — № 2. — С. 6–8.
7. *Міліневський Г. П.* Проблеми озонового шару // Фізика та астрономія в школі. — 2001. — № 2. — С. 8–12.
8. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Фізика. Астрономія. 7–12 класи. — К.; Ірпінь: Перун, 2005. — 80 с.
9. *Ройко Я. М.* Задачі з фізики — Україна в цікавих фактах // Фізика та астрономія в школі. — 2000. — № 4. — С. 8–11.
10. *Шевченко Н. О.* Соціально-педагогічні засади формування екологічної культури учнівської молоді: Автореф. дис. ... канд. пед. наук: спец 13.00.05 «Соціальна педагогіка». — К., 2008. — 20 с.

Т. М. ПОПОВА,
канд. пед. наук, доцент, Керченський державний морський університет,

А. І. ПАВЛЕНКО,
д-р пед. наук, професор, Запорізький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти.

УДК 377.36.315:004:51

ДЕЯКІ МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ЗАСТОСУВАННЯ НОВИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІН МАТЕМАТИЧНОГО ЦИКЛУ В ТЕХНІЧНОМУ КОЛЕДЖІ

В статті йдеться про впровадження нових інформаційних технологій в процес навчання у вищих навчальних закладах І-ІІ рівнів акредитації. Розглядається питання використання системи комп'ютерної математики Matlab при розв'язуванні в технічному коледжі задач з математичних дисциплін.

In this article I consider the issue concerning the implementation of new informational technology in the educational system of high institutions. The using of the computer mathematics system Matlab when studying the mathematical disciplines in the technical college is being considered in the article too.

Постановка проблеми. Системний підхід до аналізу сутності загальнокультурної та професійної підготовки спеціалістів визначає необхідність єдності всіх компонентів цього процесу, визнання безперервного інтелектуального, творчого й професійного розвитку особистості протягом усього життя.

В Україні у вищих навчальних закладах І–ІІ рівнів акредитації здійснюється навчання за професіоналізованими програмами вищої школи — галузевими стандартами підготовки молодших спеціалістів за освітнім рівнем неповної вищої освіти. Характерною рисою зазначених освітньо-професійних програм є виражена спрямованість на ступневість в одержанні повної вищої освіти. Цей принцип збігається з концептуальними завданнями найбільш повного охоплення населення вищою освітою.

Важливим фактором підготовки фахівців є можливість здобути освіту у вищому навчальному закладі I—II рівнів акредитації, який входить до структури вищого навчального закладу III—IV рівнів акредитації. Внаслідок узгодженості програм підготовки фахівців з'являється можливість підтримки безперервності освіти від етапу «молодший спеціаліст», «бакалавр» до етапу здобуття студентом кваліфікації «спеціаліст», а пізніше й «магістр», що відкриває нові можливості працевлаштування [3; 4].

Сучасний навчальний процес неможливо уявити без застосування комп'ютерних технологій. Міністерство освіти і науки України розпочало реалізацію першої частини Державної програми комп'ютеризації вищих навчальних закладів I—II рівнів акредитації, і перші комп'ютерні класи вже надходять до навчальних закладів. Але на порядку денному стоїть завдання щодо розробки специфічного програмного забезпечення, методики використання комп'ютерів і комп'ютерних мереж, відповідної перепідготовки викладачів.

Необхідною умовою для досягнення високого рівня вищої освіти є якісне навчально-методичне забезпечення. Коледжі та технікуми традиційно відзначалися високим рівнем ефективності цієї роботи. Але, в силу об'єктивних причин, ця ступінь вищої школи є найменш забезпеченою новітньою навчальною і методичною літературою та найменш інформованою з новітніх досягнень [1].

Звичайно, якість вищої освіти в інформаційному суспільстві обумовлюється не тільки кількістю комп'ютерів і багатством інформаційних баз, але й підготовленістю як студента, так і викладача до використання сучасних інформаційних технологій, що орієнтує на систематичне здобування та поновлення знань з математики та інших предметів.

Проблемам організації професійного навчання у вищих навчальних закладах I—II рівнів акредитації присвячені роботи наступних науковців: К. Ф. Беркити, Ю. Л. Дещинського, І. І. Литвина, І. В. Оленюк, В. І. Рябця та інших.

Наукові та методичні аспекти проблеми використання інформаційних технологій в процесі навчання висвітлено в дослідженнях Ю. В. Горошка, В. І. Клочка, В. В. Лапінського, М. І. Жалдака, Ю. В. Триуса, В. І. Шавальової та інших.

Аналіз досліджень і публікацій, в яких приділяється увага вирішенню проблем використання інформаційних технологій в навчальному процесі взагалі та у вищих навчальних закладах I—II рівнів акредитації, зокрема, дозволив виділити низку нерозв'язаних завдань, а саме: дослідження науково-педагогічної ефективності використання комп'ютерних технологій під час навчання студентів технічних спеціальностей; розробка науково обгрунтованих комп'ютерно-орієнтованих методик вивчення математичних дисциплін з подальшим якісним і кількісним опрацюванням одержаного матеріалу.

Метою статті є дослідження можливостей використання системи комп'ютерної математики Matlab під час вивчення математичних дисциплін у технічному коледжі.

Основна частина. Успіх студентів у майбутній професійній діяльності залежить від того, наскільки володіють вони знаннями, вміннями та навичками роботи з комп'ютером, наскільки вони здатні оволодіти новими програмними засобами. Систематичне вивчення інформаційних технологій, зокрема систем комп'ютерної математики, сформує у студентів ставлення до комп'ютера і як до засобу розв'язування професійних задач [2].

Використання СКМ значно полегшує розв'язування типових математичних задач, таких як обчислення значень функцій та побудова їх графіків, розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем, обчислення інтегралів, знаходження похідних функції тощо. При цьому у користувача немає потреби в різноманітних довідниках та математичних таблицях, і разом з тим з'являються можливості в короткі терміни розв'язувати значну кількість математичних задач. Використання СКМ стимулює інтерес студентів одночасно і до математики, і до новітніх інформаційних технологій та програмування.

Працюючи з СКМ, студент не тільки засвоює та застосовує методи математики, але й закріплює та суттєво розширює свої уміння в роботі з прикладними програмами. Така унікальна інтеграція пізнавальних можливостей виключно корисна в умовах скорочення часу на вивчення математичних дисциплін в технічному коледжі.

Застосування інформаційних технологій в навчальному процесі в цілому та під час вивчення математичних дисциплін, зокрема, дозволить здійснити такі основні функції: організація пізнавальної діяльності шляхом наочного і розумового моделювання; реалізація системи учбових дій, а також їх контролю і корекції; створення нових форм навчального процесу, моделювання спільної діяльності викладача та студентів.

Розглянемо деякі аспекти методики застосування системи комп'ютерної математики Matlab під час вивчення лінійної алгебри та розв'язання систем лінійних рівнянь.

Спочатку СКМ Matlab була написана, щоб забезпечити математикам, вченим та інженерам можливість працювати з об'єктами лінійної і векторної алгебри, тобто векторами і матрицями, настільки просто, наскільки це взагалі можливо. Система широко використовувалася для викладання лінійної алгебри та чисельних методів, а також для проектування систем управління, але швидко завоювала популярність у багатьох інших наукових та інженерних областях.

Вбудовані функції Matlab дозволяють обчислювати норму, визначник і ранг матриць, виконувати обернення матриць, розкладання матриць, обчислювати власні значення і вектори, сингулярні числа матриць, обчислювати функції від матриць, вирішувати системи лінійних рівнянь і т. д.

При вивченні властивостей визначника або рангу матриць можна студентам запропонувати перевірити ці властивості за допомогою системи Matlab.

В Matlab матриці задаються за допомогою символів («[ ]» і «[;]»), квадратні дужки використовуються для об'єднання значень, які вони охоплюють; матриці є двовимірними масивами.

При обчисленні визначника використовується вбудована в ядро функція det (). За допомогою оператора «:» формувався діапазон номерів рядків, які беруть участь в утворенні нової матриці. У тому випадку, якщо вхідним параметром функції det () є прямокутна матриця, в командне вікно буде виведено наступне повідомлення про помилку.

При перевірці властивостей слід використовувати функцію isequal (), яка повертає значення 1, якщо порівнювані величини рівні, і 0 — в противному випадку.

Приклад 1. Перевірити властивості визначника.

Визначник має наступні властивості:

1. При транспонуванні матриці значення її визначника не змінюється:

```
>> A=[2 4 6 1 ;6 4 9 8;3 5 9 0; 12 3 9 6]
   A =
          2    4    6    1
          6    4    9    8
          3    5    9    0
         12    3    9    6
   isequal (det(A),det(A'))
   ans =
          1
```

2. При перестановці двох рядків (або стовпців) матриці знак її визначника змінюється на протилежний:

```
>> isequal (det(A),-det([A(4,:);A(2,:);A(3,:);A(1,:)]))
   ans =
          1
```

3. Якщо всі елементи деякого рядка (або стовпця) матриці мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника:

```
>> A=[2 4;6 4];isequal (4*det([2 1;6 1]),det(A))
   ans =
          1
```

4. Визначник матриці, що має два однакових рядка (або стовпця), дорівнює нулю:

```
>> A=[4 2 6 4;4 2 6 4;2,3,4,9];isequal (det(A),0)
   ans =
          1
```

5. Якщо всі елементи деякого рядка (або стовпця) матриці визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю:

```
>> A=[1,2,3;1,2,5;0 0 0];
>> det(A)
   ans =
          0
```

6. Якщо всі елементи деякого рядка (або стовпця) матриці визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю:

```
>> A=[2 4 6 1 ;4 8 12 2;3 5 9 4; 12 4 9 6]
   A =
          2    4    6    1
          4    8   12    2
          3    5    9    4
         12    4    9    6
>> det(A)
   ans =
          0
```

7. Якщо до якого-небудь рядка (стовпця) визначника матриці додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те ж число, то визначник не змінить своєї величини.

```
>> A=[2 4 6 1 ;6 4 9 8;3 5 9 0; 12 3 9 6];
>> isequal (det(A),det([A(4,:);A(3,:);A(2,:)+2*A(3,:);A(1,:)]))
   ans =
          1
```

8. Трикутний визначник, в якого всі елементи, що лежать вище (нижче) за головну діагональ, є нулями, рівний добутку елементів головної діагоналі.

```
>> A=[2 4 6;0 4 2;0 0 1]
A =
          2    4    6
          0    4    2
          0    0    1
>> isequal (det(A),8)
   ans =
          1
```

Таким чином, всі наведені властивості визначника справедливі.

Приклад 2. Перевірити властивості рангу матриці.

Ранг матриці має наступні властивості:

1. Ранг матриці не змінюється при транспонуванні:

```
>> A=[2 4 6 1 ;6 4 9 8;3 5 9 0; 12 3 9 6]
A =
          2    4    6    1
          6    4    9    8
          3    5    9    0
         12    3    9    6
>> isequal(rank(A),rank(A'))
   ans =
          1
```

2. Ранг матриці не змінюється при перестановці її рядків (або стовпців):

```
>> isequal(rank(A),rank([A(4,:);A(2,:);A(3,:);A(1,:)]))
   ans =
          1
```

3. Ранг матриці не змінюється при множенні рядка (або стовпця) на відмінне від нуля число:

```
>> isequal(rank(A),rank([A(:,4),2*A(:,3),A(:,2),A(:,1)]))
   ans =
        1
```

4. Ранг матриці не змінюється при додаванні рядків (або стовпців).

```
>> isequal(rank(A),rank([A(4,:);A(3,:);A(2,:)+A(3,:);A(1,:)]))
   ans =
        1
```

Таким чином, всі розглянуті властивості для рангу матриці справедливі.

При вивченні лінійної алгебри особливу увагу слід звернути на системи лінійних рівнянь. Розв'язування та дослідження систем лінійних рівнянь — одна з тих математичних проблем, яка має широке розповсюдження.

Система Matlab дозволяє розв'язувати системи лінійних рівнянь як точними, так і наближеними методами. Для розв'язання системи лінійних рівнянь за допомогою Matlab слід застосовувати оператор «\» або функцію mldivide (), які самостійно обирають кращий метод для розв'язання заданої системи рівнянь. При цьому розв'язання системи лінійних рівнянь будь-якого порядку досягається однією командою.

Розглянемо деякі приклади задач з фізико-математичних дисциплін, які зводяться до розв'язування систем лінійних рівнянь, та розв'яжемо їх за допомогою Matlab.

Приклад 3. Є три банки, кожен з яких нараховує вкладнику певний річний відсоток (свій для кожного банку). На початку року 1/3 внеску розміром 6000 грош. од. вклали в банк 1; 1/2 внеску — в банк 2 і частину, що залишилася, — в банк 3; до кінця року сума цих внесків зросла до 7250 грош. од. Якби спочатку 1/6 внеску поклали в банк 1, 2/3 — в банк 2 і 1/6 вкладу — в банк 3, то до кінця року сума внеску склала б 7200 грош. од.; якби 1/2 внеску поклали в банк 1, 1/6 — в банк 2 і 1/3 внеску — в банк 3, то сума внесків в кінці року склала б знов 7250 грош. од. Який відсоток виплачує кожен банк?

Нехай перший банк виплачує річний відсоток x_1, другий банк — x_2, а третій — x_3. Тоді відповідно до внесків отримаємо:

а) $$6000+\frac{1}{3}\cdot 6000\cdot\frac{x_1}{100}+\frac{1}{2}\cdot 6000\cdot\frac{x_2}{100}+ + (1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}))\cdot\frac{x_3}{100}\cdot 6000=7250$$

б) $$6000+\frac{1}{6}\cdot 6000\cdot\frac{x_1}{100}+\frac{2}{3}\cdot 6000\cdot\frac{x_2}{100}+ +\frac{1}{6}\cdot\frac{x_3}{100}\cdot 6000=7200$$

в) $$6000+\frac{1}{2}\cdot 6000\cdot\frac{x_1}{100}+\frac{1}{6}\cdot 6000\cdot\frac{x_2}{100}+ +\frac{1}{3}\cdot\frac{x_3}{100}\cdot 6000=7250$$

Перетворимо отримані вирази і запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}6000+20x_1+30x_2+10x_3=7250\\ 6000+10x_1+40x_2+10x_3=7200\\ 6000+30x_1-10x_2+20x_3=7250\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=125\\ x_1+4x_2+x_3=120\\ 3x_1-x_2+2x_3=125\end{cases}$$

Створимо матриці A і B та отримаємо розв'язки системи рівнянь застосовуючи оператор «\» :

```
>> A=[2 3 1;1 4 1;3 1 2],B=[125;120;125]
   A =
        2    3    1
        1    4    1
        3    1    2
   B =
       125
       120
       125,
```

тобто перший банк нараховує вкладнику 25% річного доходу, другий — 20%, третій — 15%.

Приклад 4. В електротехніці може бути використана наступна задача. Є електричний ланцюг (рис. 1). Електрорушійна сила кожного з джерел ε_1, ε_2 дорівнює 120 В, джерела ε_3 — 240 В. Значення опорів: $r_1 = r_3 = 1$ Ом, $r_2 = 2$ Ом, $r_4 = r_5 = 10$ Ом, $r_6 = 20$ Ом. Знайти силу струму на всіх ділянках ланцюга.

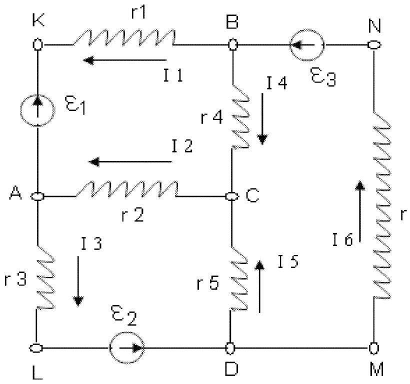


Рис. 1.

Для розв'язування задачі необхідно застосувати два відомих правила Кирхгофа, враховуючи показані на рисунку напрями струмів і електрорушійних сил.

Перше правило, застосоване до кожного вузла, дає рівняння:

Вузол A: $I_1+I_2-I_3=0$
Вузол B: $I_6-I_1-I_4=0$
Вузол C: $I_4+I_5-I_2=0$
Вузол D: $I_3+I_5-I_6=0$.

Друге правило, застосоване до кожного замкнутого контуру, приводить до рівнянь:

Контур $ACBKA$: $I_1-2I_2-10I_4=-120$,

Контур $ALDCA$: $2I_2+I_3+10I_5=120$,
Контур $BCDMNB$: $10I_4-10I_5+20I_6=240$,
Контур $ACDMNBKA$:

$I_1-2I_2-10I_5+20I_6=240—120$,

Контур $ALDMNBCA$:

$I_3+20I_6+10I_4+2I_2=240+120$,

Контур $ALDCBKA$:

$I_1+I_3+10I_5-10I_4=120—120$,

Контур $ALDMNBKA$:

$I_1+I_3+20I_6=240—120+120$.

Розглядаючи спільно отримані рівняння, приходимо до наступної системи 11 рівнянь, що містить шість невідомих:

$$\begin{cases} I_1+I_2-I_3=0 \\ -I_1-I_4+I_6=0 \\ -I_2+I_4+I_5=0 \\ I_3-I_5-I_6=0 \\ I_1-2I_2-10I_4=-120 \\ 2I_2+I_3+10I_5=120 \\ I_4-I_5+2I_6=24 \\ I_1-2I_2-10I_5+20I_6=120 \\ 2I_2+I_3+10I_4+20I_6=360 \\ I_1+I_3-10I_4+10I_5=0 \\ I_1+I_3+20I_6=240 \end{cases}$$

Алгебраїчні рівняння та системи лінійних алгебраїчних рівнянь до четвертого порядку включно за допомогою СКМ Matlab можна розв'язати скориставшись командою solve ():

Створимо символьні змінні за допомогою функції syms:

```
>> syms I1 I2 I3 I4 I5 I6;
```

Отримаємо розв'язки:

```
>> [I1 I2 I3 I4 I5 I6]=...
solve('I1+I2-I3=0','-I1-I4+I6=0','-I2+I4+I5=0',...
'I3-I5-I6=0','I1-2*I2-10*I4=-120','2*I2+I3+10*I5=120',...
'I4-I5+2*I6=24','I1-2*I2-10*I5+20*I6=120',...
'2*I2+I3+10*I4+20*I6=360','I1+I3-10*I4+10*I5=0',...
'I1+I3+20*I6=240')
  I1 =
       2
  I2 =
       16
  I3 =
       18
  I4 =
       9
  I5 =
       7
  I6 =
       11
```

Отже, ми отримали наступні розв'язки: $I_1=2$ А, $I_2=16$ А, $I_3=18$ А, $I_4=9$ А, $I_5=7$ А, $I_6=11$ А.

Приклад 5. Розглянемо задачу з теорії теплоти, що належить до поширеного у фізиці типу задач: відомо, що питома теплоємність води непостійна і при постійному тиску є функцією від температури води. Якщо прийняти питому теплоємність води при 15°С за одиницю, то для інших температур при постійному тиску досліди дають значення питомої теплоємності, що наведені в таблиці:

Температура t (в градусах С)	35	50	65	80	90	100
Питома теплоємність c (в кал/г·град)	0,9982	0,9988	1,0002	1,0025	1,0046	1,0072

Потрібно підібрати формулу найпростішого вигляду, для якої перераховані в таблиці пари значень температури t і питомої теплоємності c були б відповідними парами значень аргументу і функції.

Відзначимо, що формули, які встановлюються на підставі даних досліду, називаються емпіричними. Розв'язування задачі почнемо з того, що побудуємо криву, яка графічно відображає функціональну залежність значень температури t і питомої теплоємності c. Для цього скористаємося СКМ Matlab і введемо наступні команди:

```
>> t=[35 50 65 80 90 100];
>> c=[0.9982 0.9988 1.0002 1.0025 1.0046 1.0072];
>> plot(t,c)
```

Отримана крива (рис. 2) за формою близька до параболи, рівняння якої має наступний вигляд: $c=pt^2+qt+r$.

Визначимо коефіцієнти p, q, r, для чого необхідно, щоб приведені в таблиці пари значень t і c відповідали передбачуваній формулі. Підставимо їх у формулу і отримаємо для трьох невідомих коефіцієнтів наступну систему шести рівнянь:

$$\begin{cases} 1225p+35q+r=0.9982 \\ 2500p+50q+r=0.9988 \\ 4225p+65q+r=1.0002 \\ 6400p+80q+r=1.0025 \\ 8100p+90q+r=1.0046 \\ 10000p+100q+r=1.0072 \end{cases}$$

Отриману систему рівнянь необхідно розв'язувати одним з наближених методів, але, скориставшись системою Matlab, автоматично обираємо кращий метод для розв'язання.

Створимо матриці a і b та застосуємо оператор «\»:

```
>> a=[1225 35 1;2500 50 1;4225 65 1;6400 80 1;8100 90 1; 10000 100 1]
  a =
      1225    35   1
      2500    50   1
      4225    65   1
      6400    80   1
      8100    90   1
     10000   100   1
>> b=[0.9982;0.9988; 1.0002;1.0025;1.0046;1.0072]
  b =
      0.9982
      0.9988
      1.0002
```

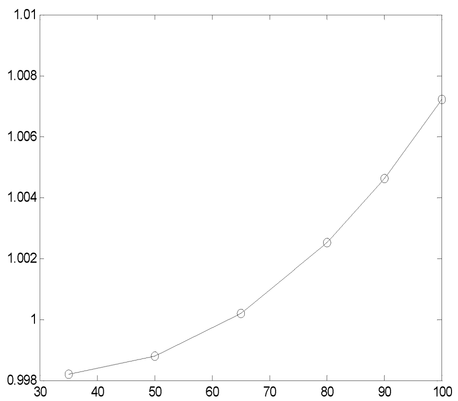


Рис. 2.

1.0025
1.0046
1.0072

Отримаємо розв'язки:

```
>> format short e
>> x=a\b
x =
 2.0695e–006
–1.4218e–004
 1.0007e+000
```

Емпірична формула має вигляд:

$$c = 0.000002t^2 - 0.00014t + 1.0007.$$

Висновки. Використання комп'ютерних технологій під час навчання студентів технічних спеціальностей звільняє їх від виконання рутинних обчислень, дає час для обмірковування алгоритмів розв'язування задач, постановки задач і побудови відповідних математичних моделей, дає можливість для подання результатів у найбільш зручній формі.

Застосування СКМ Matlab можна використати для більш глибокого вивчення математичної сутності задач і методів їх розв'язання. При цьому відкриваються нові можливості щодо гуманізації навчального процесу та гуманітаризації освіти, диференціації навчання відповідно до запитів, нахилів і здібностей студентів.

В силу динамічності змін, які відбуваються в суспільстві, необхідно удосконалювати шляхи та умови ефективного впровадження в навчальний процес нових інформаційних технологій для підвищення якості знань та рівня підготовки майбутніх спеціалістів відповідно до вимог державного стандарту освіти.

Література

1. Концептуальні засади реформування вищих навчальних закладів I–II рівнів акредитації // Освіта. Технікуми, коледжі: Навч.-метод. журн. — К., 2006. — Вип. 1(14). — С. 4–6.

2. *Жалдак М. І.* Педагогічний потенціал комп'ютерно орієнтованих систем математики // Науковий часопис Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова. Серія 2: Комп'ютерно орієнтовані системи навчання. — 2003. — Вип. 7. — С. 3–16.

3. Концепція освітньої діяльності Кременчуцького коледжу КДПУ з підготовки молодших спеціалістів за напрямом 5.050502 «Інженерна механіка». — Кременчук: Вид-во КДПУ, 2005. — 15 с.

4. Освітньо-професійна програма підготовки молодших спеціалістів напряму 5.050502 «Інженерна механіка». — К.: НМЦ ЗО, 2004. — 70 с.

5. Почтовюк С. І. Розв'язування задач лінійної алгебри з використанням системи Matlab // Науковий часопис Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова. Серія 2: Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. — 2009. — Вип. 7. — С. 135–149.

С. І. ПОЧТОВЮК,
аспірантка Інституту інформатики Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова, викладач інформатики та математики Кременчуцького коледжу Кременчуцького державного політехнічного університету ім. Михайла Остроградського.

УДК 37.026.9

МОДЕРНІЗАЦІЯ ПРИНЦИПІВ ДИДАКТИКИ, АПРОБОВАНА ДОСВІДОМ ПІДГОТОВКИ ТА ПРОВЕДЕННЯ ТЮМ

Висвітлено деякі концептуальні засади й аспекти з більш ніж десятирічного досвіду підготовки та проведення математичних турнірів від шкільного до Всеукраїнського рівнів, які є більш ніж переконливою апробацією висловлених позицій.

In the article some conceptual positions and aspects are expounded from more than ten year experience of preparation and lead-through of mathematical tournaments from school to the All-Ukrainian level, which are convincing approbation of positions of author.

Масштабні зміни в розвитку українського суспільства останніх десятиліть зумовили значне зростання нової інформації, потребу в переосмисленні й упорядкуванні відомих знань, і як наслідок, відмічає «Енциклопедія освіти» [3], необхідність принципових змін методології, змісту, методичного забезпечення тощо. Метою освіти, як зазначено у передмові, має бути виховання покоління, що прагне і вміє вчитись впродовж життя та сповідує демократичні ідеали, або більш детально [3, 989], виховання високих моральних якостей, розвиток талантів і здібностей, формування громадян, здатних до свідомого суспільного вибору, забезпечення на цій основі інтелектуального, творчого, культурного потенціалу нації, забезпечення господарства кваліфікованими, компетентними фахівцями.

Перехід до нових соціально-економічних стосунків висуває завдання розвитку здібностей вирішувати проблеми, що виникають, пропонувати нестандартні підходи до їх розв'язання, діяти продуктивно з опорою на свій освітній потенціал. Новий ракурс отримує проблема визначення творчих можливостей людини, від вирішення якої залежить ефективність її життя і діяльності у світі, що інтенсивно змінюється. Разом з цим, можливості, що надаються існуючою вітчизняною системою освіти для творчої самореалізації учня, досить обмежені. Школи здебільшого зорієнтовані на ретрансляцію учням наукових знань і досягнень. Загальноприйнятим, домінуючим у більшості нормативних документів, програм і методик є розуміння освіти як передачі учневі відчуженого від нього «нічийного» знання. Відсутня науково обґрунтована система навчання, яка б дозволяла поєднувати індивідуальну творчу самореалізацію учня і суспільно-державне замовлення на освіту.

Протиріччя між потребами учня в самореалізації і статичними умовами його навчання, що задаються сучасною школою, може бути розв'язане розробкою такої системи навчання, яка б інтегрувала інтереси особи і суспільства, системи, яка, з одного боку, наблизить сенс і цілі навчання до індивідуальних творчих можливостей учнів, з іншого — включить у свій зміст проблематику діяльності школяра в сьогоднішньому і майбутньому часі, істотно збільшить шанси особи знайти своє місце в житті і реалізувати себе в продуктивній діяльності. Більш того, наша проблема — не лише наукове обґрунтування такої системи навчання, але і її практична реалізація. Тож виникає необхідність розробки теоретичних основ такої системи (цілі, принципи, зміст, технології, форми, методи), що дозволили б створити її структурну основу і забезпечили умови практичної реалізації. Змістовною основою, дидактичним ядром такої теорії є концепція творчої самореалізації учнів, що визначає продуктивний характер і тип навчання.

Мета дослідження — розробка і експериментальна перевірка теоретичних основ специфічного типу навчання математики засобами творчих змагань, зокрема, турнірів, що забезпечує творчу самореалізацію учнів в процесі їх загальної освіти.

Проблема дослідження полягає у виявленні дидактичних умов, за яких можливе поєднання індивідуальної творчої самореалізації учнів з одночасним виконанням соціального замовлення на освіту, учнівської творчості й виконання освітніх стандартів, набуття компетентності в процесі загальної освіти.

У філософії доведено, що особистістю людина стає лише тоді, коли починає самостійно займатися творчою діяльністю [4, 205]. Не кожна людина стане великим письменником, композитором, вченим, інженером, але кожна має створювати певні духовні і матеріальні блага.

Перший крок — це виховання творчої спрямованості особи: формування інтересу, мотивації до пізнавальної творчої діяльності.

Деякі вчені дотримуються позиції, що творчі якості передаються у спадок від батьків і їх неможливо виховати, тож педагогіка приречена лише створювати умови для їх розвитку.

З-поміж інших виділимо підхід Г. С. Альтшуллера та І. М. Верткіна. Для вирішення цієї проблеми вони проаналізували понад тисячу біографій творчих осіб (поетів, художників, композиторів, вчених, лікарів, інженерів тощо) і встановили, що, незалежно від роду діяльності, характеристичними якостями творчої особистості є:

— уміння поставити гідну творчу мету і спрямувати свою діяльність на її досягнення;

— уміння планувати і самоконтролювати свою діяльність;

— висока працездатність;

— уміння аналізувати, виділяти проблеми, що є складовими основної мети, й вирішувати їх;

— уміння відстоювати свої переконання [1, 9—184].

Як бачимо, всі ці якості є придбаними, точніше — самовихованими протягом життя і жодного відношення до спадковості не мають. В той же час не можна заперечувати, що кожна людина отримує генетичні задатки до тієї чи іншої діяльності. Для реалізації цих задатків і необхідні творчі якості. Щодо визначення їх структури знову скористаємось результатами досліджень закономірностей творчої діяльності, які впродовж п'ятдесяти років проводив Г. С. Альтшуллер.

На початковому етапі роботи ним була створена методика винахідництва, що отримала назву теорії вирішення винахідницьких завдань (рос. — ТРИЗ-педагогика). На наступному етапі було створено вчення про творчі якості особистості, а на останньому — розроблено основи теорії розвитку творчої особистості.

Теорію винахідництва Г. С. Альтшуллер створював стосовно технічних систем, але подальші дослідження самого автора і його послідовників показали, що відкриті ним закони можуть бути використані й для розвитку будь-яких систем, у тому числі й педагогічних. За їх рекомендаціями знайомство з положеннями цієї теорії дозволить по-новому оцінити свою роботу і побачити в ній те, що до цих пір було приховано для аналізу й подальшого удосконалення роботи.

Розвиток будь-якої системи починається з виникнення нових проблем, задач, функцій, які система повинна виконувати, але не виконувала до цього. Можливі шляхи модернізації — це зміна порядку розташування структурних елементів системи; зміна одного чи кількох її елементів; внесення елементів, які виконуватимуть нові функції; об'єднання системи з деякою іншою системою чи перетворення одного з її елементів у самостійну систему для виконання нових функцій.

Цей короткий виклад методики розвитку систем спробуємо застосувати до аналізу принципів класичної дидактики, їх модернізації з урахуванням цілей сучасної освіти та подальшою деталізацією при складанні завдань турнірів юних математиків.

Висвітлено деякі концептуальні засади й аспекти з більш ніж десятирічного досвіду підготовки та проведення математичних турнірів від шкільного до Всеукраїнського рівнів, які є більш ніж переконливою апробацією висловлених позицій.

Почнемо з нової головної вимоги, яку суспільство поставило перед школою, — розвивати і виховувати етичну і творчу особистість.

Вперше система принципів навчання, розвитку і виховання була викладена Я. А. Коменським у «Великій дидактиці» (1643 р.). Не коментуючи всім відомі принципи, детальне пояснення суті яких міститься в кожному підручнику з педагогіки, лише наведемо їх з подальшою метою проаналізувати відповідність цілям освіти. За Я. Коменським (див., наприклад, [8]) педагогічний процес в школі повинен відповідати наступним принципам:

— цілеспрямованості процесу освіти; взаємозв'язку освіти з практикою;

— науковості;

— систематичності і послідовності освіти;

— самостійності, активності і свідомості освіти;

— доступності, врахування вікових та індивідуальних особливостей учнів;

— оптимального вибору методів, форм і засобів освіти;

— наочності;

— раціонального поєднання вимогливості і пошани до учня;

— раціонального поєднання індивідуальної і колективної освіти;

— комплексного підходу до освіти.

Принципи, сформульовані Я. А. Коменським ще в XVII столітті, не змінились й до нашого часу. На основі цих принципів дидактики складено навчальні програми і визначено стандарти освіти, абсолютна більшість підручників для учнів та методичних посібників для вчителів. Не можна сказати, що це погані дидактичні матеріали і малоефективні методики викладання. В них багато корисного, потрібного і цікавого, але досягти мети шкільної освіти за допомогою цих дидактичних матеріалів навряд чи можливо. І проблема тут не тільки в дидактичних матеріалах, а й в принципах, на основі яких вони створені. Ці принципи застаріли. Адже суспільство змінилося, ми увійшли у XXI століття, і потрібні серйозні зміни, в тому числі й принципового характеру.

Крім того, проблема розвитку принципів дидактики — це не просто проблема теорії педагогіки, це головним чином проблема розвитку педагогічної практики для реалізації мети шкільної освіти.

За умови відсутності методології зміни і розвитку теоретичних закономірностей, і, головне, не претендуючи на формулювання загальних принципів освіти, спробуємо проаналізувати можливість досягнення мети освіти — розвитку етичної і творчої особистості — у такій ланці освітнього простору, як творчі змагання, зокрема з математики.

Принцип цілеспрямованості навчання вимагає від вчителя конкретизації навчальних, розвиваючих і виховних завдань для кожного уроку і теми, в цілому. Але в той же час немає чіткої спрямованості на мету освіти — виховання особистості. Замість неї — знання, уміння і навички (ЗУН). Проте ЗУН — це засіб для досягнення мети, але не сама мета, тому педагогічний процес планується і коректується в класичній дидактиці відповідно до рівня ЗУН, що перетворює учня із особистості в комп'ютерну дискету, на яку необхідно внести певний обсяг ЗУН за відведений на навчання час. І, певно, вважається, що на основі ЗУНів особистість якось сформується сама. В результаті випускники наших шкіл, навіть маючи непогані знання, уміння і навички, здебільшого пасують вже перед першою нестандартною ситуацією, та й про їхню моральність можна говорити з певною натяжкою.

Принцип цілеспрямованості процесу освіти вимагає внесення до його змісту параметрів, що характеризують нову мету. Ці параметри — етичні і творчі якості особистості, тож принцип можна сформулювати як ***принцип етичної і творчої цілеспрямованості педагогічного процесу***.

Реалізація ***принципу самостійності, активності і свідомості освіти*** передбачає навчання учнів самостійній навчальній роботі і розвиток мотивації до навчальної діяльності. Якщо проаналізувати навчальні посібники, провести спостереження уроків, то можна побачити завдання і тексти для розвитку інтересу учнів до навчальної діяльності, навчання дітей самостійній роботі на окремих етапах уроку при виконанні окремих завдань. Але ж завдання не лише в цьому, але й в тому, щоб поступово навчити учнів самостійно планувати, виконувати, аналізувати і оцінювати свою навчальну діяльність. Проте ця найважливіша навчальна робота, необхідна для виховання самостійної особистості, не входить у зміст принципу. Аналогічна ситуація з виховною роботою. Отже, принцип самостійності вимагає серйозного доповнення і може бути сформульований як ***принцип розвитку в учнів самоосвіти і самовиховання***.

Принципи активності і свідомості освіти передбачають створення оптимальних умов для розвитку в учнів мотивації до навчальної діяльності. Що ж до результатів у цьому напрямку — вони, м'яко кажучи, далекі від бажаних. Інтерес до пізнавальної діяльності у багатьох наших учнів і випускників відсутній. Одна з причин — мотиваційні завдання і тексти з багатьох предметів є лише доповненням до уроку, а не основою змісту уроку: абсолютна більшість завдань і вправ не викликає зацікавленості, має репродуктивний характер. А репродуктивна діяльність, як відомо, не сприяє розвитку інтересу. Тож можливою модернізацією є ***принцип розвитку мотивації до творчої діяльності***.

Принцип науковості вимагає включати в навчальні матеріали лише інформацію, перевірену в результаті наукових експериментів. Через це майже відсутні навчальні посібники, що містять невирішені проблеми науки, описання методів наукових відкриттів, творчі біографії вчених, альтернативні офіційній науці гіпотези і теорії. А саме вони сприяють вихованню творчої особистості. Творчість починається з визначення проблем, а в шкільних підручниках їх немає. Майже відсутні й подальші елементи наукового дослідження. Безумовно, не вважаючи дослідницькі навички необхідною складовою освіти всіх і кожного, разом з цим, піклуючись про творчий потенціал нації, ми маємо активно сприяти розвитку зацікавленості з подальшим набуттям навичок наукового дослідження. Що ж до ***принципу науковості – надати*** йому ***максимально творчого забарвлення***.

Принцип систематичності і послідовності освіти вимагає такої структури навчальних програм, яка б передбачала основні закономірності і теорії наук, і мистецтв, а також послідовне їх засвоєння від простого до складного. Виконання цього принципу при підготовці програм і підручників поступово привело до того, що обсяг інформації, яка вивчається, за останні два десятиліття перевищив розумові можливості учнів. Більшість дітей в школах вже не в змозі вивчити все передбачене шкільними програмами. Впровадження інформаційних технологій розширює можливості учнів у сприйнятті інформації, а дослідження психологів, зокрема, школи В. В. Давидова, переконливо доводять, що послідовне засвоєння матеріалу від простого до складного — це лише один із можливих шляхів навчання, а не загальнодидактичний принцип.

З урахуванням нових вимог до мети освіти принцип має окреслити розвиваючу спрямованість структури навчального матеріалу, необхідність пріоритетного розвитку міжпредметних навчальних умінь. В результаті цих змін він може бути сформульований як ***принцип пріоритетного засвоєння загальнопредметних понять і міжпредметних способів діяльності***.

Принцип доступності, врахування вікових та індивідуальних особливостей учнів вимагає введення диференційованого навчання з кожного предмета і виховання з урахуванням індивідуальних особливостей й інтересів учнів. Не дивлячись на позитивні зміни і події останніх років, можна стверджувати, що в цілому ця проблема не вирішена, а дослідження психологів переконують в необхідності ***врахування ще й психологічних особливостей учнів***.

Принцип взаємозв'язку освіти з практикою передбачає, що зміст навчання і виховання повинні максимально підготувати учнів до практичної діяльності в реальному житті. Сучасна компетентнісна орієнтація освіти підсилює ці задачі творчою, результативною складовою, вмінням зорієнтуватись у нестандартній ситуації, віднайти способи розв'язання проблеми, застосувавши набуті знання й уміння.

Принцип оптимального вибору методів, форм і засобів освіти орієнтує вчителя на досягнення максимально можливих результатів на уроках і виховних заняттях. Втім у реальній практиці роботи шкіл переважно використовуються пояснювально-ілюстративні, репродуктивні і частковотворчі методи й фронтальні форми роботи. У багатьох випадках їх вибір вчителем вважається раціональним. Але ж мета освіти — формування творчої особистості, яка вміє організувати свою діяльність і стосунки з іншими людьми на основі етичних принципів. А чи можна виховати творчу особистість, використовуючи для цього нетворчі методи і фронтальні форми роботи?

Сучасне інформаційно-технологічне суспільство вимагає іншого підходу. Педагогічний процес має бути пов'язаний не просто з практикою, а в першу чергу з творчою діяльністю людини. Об'єднання і модернізація цих принципів дозволяє сформулювати ***принцип пріоритету творчої діяльності*** учнів, ***вибору форм освіти, що забезпечують*** її ***продуктивність, самостійність і творчість учнів***.

Принцип раціонального поєднання вимогливості і пошани до учня недостатній для виховання демократичної, етичної особистості. Знання учнями своїх обов'язків, викладених у вимогах вчителя, ще не означає їх виконання й не сприяє підвищенню якості освіти. Вихід вбачається в більш широкому впровадженні ідей педагогіки співпраці й співтворчості, створенні і використанні ситуацій успіху, передбаченні можливості вибору учнем обсягу і ступеня складності завдань, розвитку інтересів учнів. Ці елементи дозволяють демократизувати педагогічний процес і, відповідно, сформулювати ***принцип демократичних взаємовідносин вчителя і учнів***.

Щодо решти принципів, зазначимо, що питання активізації навчально-пізнавального процесу, співвідношення та зв'язку трьох основних функцій освіти (навчання, виховання та розвитку), індивідуального і колективного навчання і виховання завжди були серед найбільш актуальних проблем педагогічної теорії і практики. Особливого значення набувають вони в роботі з обдарованими дітьми. У пошуках шляхів їх розв'язання педагоги апробовували дослідницькі й пошукові методи, нестандартні форми проведення занять, дидактичні ігри тощо. Їх актуальність підсилює сучасна орієнтація освіти на формування компетенцій як готовності і здатності людини до діяльності і спілкування [5]. Вона вимагає створення дидактичних і психологічних умов, в яких учень може проявити не тільки інтелектуальну і пізнавальну активність, але й особисту соціальну позицію, свою індивідуальність, виявити себе як суб'єкт навчання.

Якнайкраще задовольняє ці вимоги й поєднує окреслені проблеми так зване інтерактивне навчання [7], або навчання, підкріплене спілкуванням. Серед основних його принципів називають діалогову взаємодію, роботу в малих групах на основі кооперації і співпраці, активно-рольову (змагальницьку, ігрову) і тренінгову організацію навчання.

Інтерактивне навчання — це взаємонавчання (колективне, групове, навчання у співпраці), де учень і вчитель є рівноправними суб'єктами навчання, розуміють, що вони роблять, рефлексують з приводу того, що вони знають, уміють і здійснюють. Інтерактивна взаємодія виключає як домінування одного учасника навчального процесу над іншим, так і однієї думки над іншою. Змінюються при інтерактивному навчанні і функції педагога: на перший план виходить роль консультанта, помічника в роботі, одного з джерел інформації. Центральне місце в його діяльності займає не окремий учень як індивід, а група учнів, взаємодія яких стимулює і активізує один одного [7]. Крім того, інтерактивне навчання формує здатність по-своєму бачити проблемну ситуацію, виходи з неї; обґрунтовувати свої позиції, свої життєві цінності; розвиває такі риси, як уміння вислухати й сприйняти іншу точку зору, уміння співпрацювати, вступати в партнерське спілкування, проявляючи при цьому толерантність по відношенню до своїх опонентів, необхідний такт, доброзичливість до учасників процесу спільного відшукання шляхів взаєморозуміння, пошуку істини.

Тож саме ***принцип інтерактивності*** якнайкраще поєднує в собі ***принципи комплексного підходу та раціонального поєднання індивідуальної і колективної освіти***. Особистісного й сучасного звучання набуває в ньому і ***принцип наочності*** — це вже не тільки використання вчителем наочних засобів на уроках і виховних заняттях, а й широке впровадження в навально-виховний процес інноваційних технологій, особливо коли мова йде про творчо, математично обдаровану молодь та ще й в умовах ретельно опрацьованої системи математичних турнірів.

Найкращою моделлю такого інтерактивного навчання, на наше глибоке переконання, є саме ТЮМ як реальна, апробована, а не декларована спільна діяльність учнів і вчителів на всіх етапах освітнього процесу з широким застосуванням активних і інтерактивних технологій навчання, що забезпечують максимальну самостійність і активність всіх учасників освітнього процесу.

Як частина загальної освіти математична освіта складається з трьох основних компонентів: навчання, виховання і розвиток, і має включати змістовний, естетичний, психологічний, світоглядний і прагматичний аспекти. Математика покликана допомогти людині:

— закласти фундамент того специфічного способу мислення, що називається математичним: навчитися міркувати логічно та алгоритмічно (аналізувати, відрізняти гіпотезу від факту, критикувати, розуміти зміст поставленого завдання, схематизувати, точно висловлювати свої думки тощо), а також розвинути уяву та інтуїцію (просторове уявлення, здатність прогнозувати результат і передбачати шлях розв'язання і тому подібне);

— оволодіти багатьма конкретними математичними знаннями, необхідними для орієнтації у навколишньому світі й для підготовки до майбутньої професійної діяльності;

— ознайомитись із зразками застосування математичних методів у природознавстві, суспільних науках та повсякденні, процедурою математизації проблем, сформувати навички математичного моделювання;

— усвідомити принципи загальнолюдської моралі (інтелектуальна чесність, об'єктивність, прагнення збагнути істину);

— розвинути в собі естетичне сприйняття світу, краси інтелектуальних досягнень, ідей і концепцій, пізнати радість творчої праці.

Крім того, курс математики здатний ефективніше, ніж будь-який інший предмет виховувати такі життєво важливі якості особистості, як спостережливість,наполегливість, віра у власні сили, рішучість, чесність, мужність. Щодо останніх можна, звичайно, не погодитись, відмовитись від хибної гіпотези, погодитись із хибністю вибудуваного значними зусиллями логічного ланцюжку, що, як довів опонент, веде в глухий кут, для цього потрібні рішучість, чесність і мужність.

Сучасна компетентнісна орієнтація освіти підсилює ці задачі творчою, результативною, практичною складовою, вмінням зорієнтуватися у нестандартній ситуації, віднайти способи розв'язання проблеми, застосувавши набуті знання та уміння.

Такі ж завдання стоять і перед турніром як складовою математичної освіти, і досягти їх можна лише в комплексі (цілі, зміст, форма, кадри). Цілі й форма проведення турнірів юних математиків неодноразово обговорювались на представницьких зібраннях (див., наприклад,

[6]), у періодичних виданнях. Міркування науковців, освітян (чиновників та практиків), причетних до організації та проведення турнірів, видані й окремими збірками [2, 10]. Тож більш детально зупинимось на змістовному наповненні турнірів юних математиків.

Завдання до ТЮМ, як взагалі шкільної математики, слід добирати так, щоб серед них були ті, що несуть в собі важливу інформацію, яскраво ілюструють реальну силу і плідність математичних методів, привабливі за формою чи фабулою, витонченістю розв'язання чи непередбачуваністю відповіді, здатні заінтригувати, викликати бажання взятись за розв'язання. Мають бути й призначені виправдати впровадження абстрактних математичних понять, специфічної математичної мови, створення математичних моделей, застосування математичних методів у природознавстві, суспільних науках та повсякденному житті. Мають бути і розраховані на інтуїцію так звані «задачи для изощрения ума» (рос.) (зазначимо, що саме таку назву мав перший в Європі підручник з математики, написаний британським монахом Алкуїном і виданий в 795 р. для створеної за наказом Карла Великого школи в місті Аахені).

Окреслимо й основні принципи їх складання.

Завдання мають бути різноманітними, зокрема:

— за тематикою та характером, задовольняючи різні смаки учнів;

— за складністю: від складних, таких, що іноді виходять за рамки шкільної програми, вимагають попередньої роботи з літературою, до найпростіших, навіть таких, що просто узагальнюють чи поглиблюють певні найбільш вагомі й принципові шкільні завдання.

Крім ***різноманітності***, беззаперечним є ***принцип науковості***: завдання ТЮМ забезпечують додаткову можливість для розвитку математичного мислення, математичної компетентності, закладаючи міцний фундамент наукового світогляду.

Завдання ТЮМ — переважно дослідницькі, тому основними є принципи ***варіативності*** та ***«дослідницького клубка»***. Різними можуть бути як способи і методи дослідження, форми і методи роботи над завданням, так і форми представлення результатів. Крім того, як будь-яке дослідницьке завдання, не маючи кінця, воно повинно припускати далекі і за можливістю глибокі просування. У цьому випадку є шанс, що учень, почавши навіть з простої задачі, втягнувшись і захопившись нею, побачить можливі узагальнення чи практичні застосування і через певний час отримає досить змістовний і гарний результат.

Керуючись сучасними настановами про дієве впровадження компетентнісного підходу [5], основними вважаємо принципи ***практичного спрямування та міжпредметних зі'язків***, бо математична компетентність [9] — це, поряд з набуттям основоположних знань, умінь і навичок, вміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, будувати математичні моделі, досліджувати їх методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибки.

Математичний турнір — це додаткова освіта й додаткове навантаження, тож наша задача — зацікавити, створити комфортні умови, максимально використати позитивний вплив ситуацій успіху. Звідси бажаним є принцип ***недопущення психологічного розчарування***: усвідомивши завдання, учні повинні побачити можливі напрямки дослідження. Звичайно ж, їх ефективність може бути різною, та обов'язково мають бути такі, що забезпечуть певний результат, дозволять підготувати змістовну доповідь.

Щодо завдань обласного турніру. Його можна проводити за оголошеними завданнями наступного Всеукраїнського, за дещо спрощеними або зміненими завданнями чи спеціально створеним для місцевих ТЮМ робочим складом відповідного журі. Кожен із варіантів має право на існування й певний досвід впровадження: перший практикують на Волині, другий використовують на Прикарпатті, третій — апробований у Сумах та Харкові. Кожен має свої плюси й мінуси. Останній, мабуть, є більш ефективним для початкового впровадження ідей ТЮМ. Складаючи завдання регіонального турніру, легше врахувати потенційний рівень учасників і тим самим збільшити кількість шкіл і команд, які бажають долучитись до ТЮМ і випробувати свої сили, але виникає проблема підбору кадрів. Крім того, маючи на меті участь у Всеукраїнському турнірі, це створює додаткове навантаження на учнів і вчителів, пов'язане з переорієнтацією на розв'язання інших, заздалегідь обумовлених завдань. Цих ускладнень позбавлений другий підхід. Всі працюють у напрямку, визначеному робочою групою Всеукраїнського турніру і затвердженому Міністерством освіти і науки України. Складні завдання, що обумовлені всеукраїнським рівнем, за дорученням оргкомітету місцевого турніру можуть бути спрощені членами відповідного журі до прийнятого в регіоні рівня. Визначені при цьому команди-переможці обласного туру продовжують працювати над завданнями в їх початковому вигляді, випробувавши в ході змагань власні напрацювання та долучивши ідеї розв'язання інших команд. Третій підхід передбачає випробування місцевих команд за непростими завданнями Всеукраїнського турніру. Втім, в його ефективності переконує Волинь, яка крім досвіду участі в подібних заходах, позитивно вирізняється плідною співпрацею обласного відділення МАН та науковців Волинського національного університету, наявністю вчителів-ентузіастів, які поділяють ідеї ТЮМ та виявляють професійну компетентність, бажання й готовність до копіткої роботи з учнями щодо розв'язання дослідницьких математичних задач, підготовки команд до участі в змаганні на основі підготовлених проектів, і як результат — 2—3 команди-учасниці кожного Всеукраїнського турніру, принаймні одна серед переможців.

Підсумовуючи, зазначимо, що п'ятнадцятирічний досвід організації і проведення турнірів юних математиків засвідчує ефективність модернізованих принципів освіти, покладених в їх основу. Запорукою цього, безумовно, є і наявність в команді:

— кваліфікованих фахівців-математиків, які на високопрофесійному рівні забезпечують змістовне наповнення ТЮМ;

— найкомпетентніших вчителів-ентузіастів, які поділяють ідеї турніру і беруть на себе складну і відповідальну роботу з підготовки учнівських команд;

— освітян-управлінців, які підтримують ТЮМ, сприяють організації та методичному забезпеченню турнірів;

— ретельно напрацьованого з роками методичного забезпечення ТЮМ (розбір та рефлексивний аналіз розв'язань турнірних завдань як під час турніру, так і на сторінках педагогічної преси по його завершенні, рекомендації щодо підготовки команд на семінарах творчо працюючих вчителів та видання відповідних посібників, лекторії та живе спілкування з провідними вченими в рамках ТЮМ).

І як результат — успіхи юних учасників ТЮМ — різноманітність і унікальність створеної і презентованої ними продукції, розкриття їх творчого інтелектуального потенціалу з одночасним досягненням не лише необхідного, а й підвищеного рівня засвоєння освітніх стандартів, розвиток їх особових етичних, комунікативних якостей, набуття компетентності.

Все це межі індивідуальної творчої самореалізації учнів в процесі їх загальної освіти, розв'язання проблеми відчуження учнів від освіти шляхом їх включення в інтерактивний освітній процес із розробленими і апробованими технологіями розвитку кожного за індивідуальною освітньою траєкторією в єдиному загальноосвітньому процесі.

Література

1. *Альтшуллер Г. С., Верткин И. М.* Жизненная стратегия творческой личности // Как стать еретиком / Сост. А. Б. Селюцкий. — Петрозаводск, 1991. — 363 с.

2. Вибрані матеріали турнірів юних математиків України: Навч. посіб. / Уклад. та заг. ред. К. В. Рабець. — Суми: СумДПУ, 2007. — 296 с.

3. Енциклопедія освіти / Голов. ред. В. Г. Кремень. — К.: Юрінком Інтер, 2008. — 1040 с.

4. *Ильенков Э. В.* Что же такое личность? // С чего начинается личность. — М., 1979. — С. 205.

5. Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи / За заг. ред. О. В. Овчарук. — К.: К.І.С., 2004. — 112 с. — (Б-ка з освітньої політики).

6. Математична освіта в Україні: минуле, сьогодення, майбутнє // Тези міжнар. наук.-практ. конф. (Київ, 16—18 жовт. 2007 р.). — К., 2007. — 375 с.

7. *Панина Т. С.* Современные способы активизации обучения: Учеб. пос. / Под ред. Т. С. Паниной. — 2-е изд., стер. — М.: Академия, 2006. — 176 с.

8. Педагогика / Под ред. Ю. К. Бабанского. — М.: Просвещение, 1988. — 479 с.

9. *Раков С. А.* Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти // Математика в школі. — 2005. — № 5. — С. 2—7.

10. Турніри юних математиків України: Зб. матеріалів / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, М. О. Перстюк. — Суми: УАБС НБУ, 2007. — 121 с.

К. В. РАБЕЦЬ,
канд. фіз.-мат. наук, доцент, докторант механіко-математичного факультету Київського національного університету ім. Т. Г. Шевченка.

УДК 378.14:159.955

САМОСТІЙНА НАВЧАЛЬНО-ПІЗНАВАЛЬНА ДІЯЛЬНІСТЬ СТУДЕНТІВ ЯК ПРЕДМЕТ ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Статтю присвячено проблемі самостійної навчально-пізнавальної діяльності студентів. Здійснено науковий аналіз психолого-педагогічної літератури з обраної теми, розкрито сутність даного поняття. Представлено засоби самостійної навчально-пізнавальної діяльності, за допомогою яких відбувається формування аналітичного мислення студентів.

The article is about the problem of individual cognitive work of students. It gives a scientific analysis of psychological and pedagogical literature of the problem. The author presents the definition and the way of individual cognitive work that create the analytical thinking.

Сучасний етап розвитку України характеризується необхідністю оновлення пріоритетів в області освіти як вирішального фактора формування інтелектуальних ресурсів суспільства. Впровадження інформаційних і комунікаційних технологій забезпечує потужний вплив на всі галузі суспільного життя. Покоління технічних винаходів та ідей змінюються швидше, ніж покоління людей. Щоб мати постійний кар'єрний ріст, спеціалісти з вищою освітою повинні протягом життя оновлювати свої знання, удосконалювати майстерність, творчо підходити до професійної діяльності. Тому до ключових проблем педагогіки, які вимагають постійного творчого аналізу та експериментальних перевірок, відноситься і проблема самостійної навчально-пізнавальної діяльності студентів (надалі СНПД).

Розкриття сутності СНПД особистості вимагає наукового визначення таких понять: «навчальна діяльність», «навчально-пізнавальна діяльність», «самостійна навчально-пізнавальна діяльність».

Заслуга в розробці теорії діяльності належить таким відомим вченим, як Л. Виготський, С. Рубінштейн, О. Леонтьєв, В. Давидов, П. Гальперін, Н. Тализіна.

Діяльність визначається як «активна взаємодія людини з оточуючою дійсністю, при цьому людина виступає як суб'єкт, який цілеспрямовано діє на об'єкт і, таким чином, задовольняє свої потреби» [10, 8].

Діяльність людини має такі основні характеристики: мотив, мета, предмет, структура і засоби.

Навчальна діяльність студентів є одним з різновидів діяльності людини, що спричинена особливою потребою, спрямованою на перетворення самого суб'єкта в процесі навчання.

Поняття «навчальна діяльність» науковцями трактується неоднозначно. Так, Д. Ельконін, В. Давидов та послідовники їхньої школи розглядають навчальну діяльність як таку, зміст якої є оволодіння узагальненими способами дій в сфері наукових понять. «Засвоєння знань за допомогою навчальної діяльності лише розширює свідомість та мислення учня, але не розвиває їх. Їх розвиток відбувається в процесі формування і розвитку самої навчальної діяльності, в ході якої виникають та оформлюються навчальні та розумові дії» [3, 172].

Т. Шамова характеризує навчальну діяльність «...як процес навчання, ...організований вчителем (або самим учнем), це і є цілеспрямована самокерована перетворююча діяльність щодо оволодіння знаннями, засобами їх добування та застосування» [17, 11].

Змістовий аналіз навчальної діяльності був розроблений в колективній монографії вченими Московського університету В. Графом, І. Ільясовим, В. Ляудіс. Діяльність навчання — це самозмінення, саморозвиток суб'єкта, перетворення його на особистість, яка володіє певними знаннями, уміннями та навичками. Психологічним змістом, предметом навчальної діяльності є засвоєння знань, володіння узагальненими засобами дій, в процесі яких розвивається сам суб'єкт [1].

Такої ж точки зору дотримується Л. Столяренко, який вважає, що «головним результатом навчальної діяльності у власному розумінні слова є формування теоретичного мислення» [16, 106].

Професор О. Новіков навчальну діяльність і навчання трактує як синоніми. В своїх дослідженнях він називає їх продуктивною діяльністю і виділяє наступні особливості:

1) навчальна діяльність спрямована на засвоєння інших видів людської діяльності, яка включає і саму навчальну діяльність («навчайся навчатися»);

2) навчальна діяльність спрямована на одержання «внутрішнього» для суб'єкта результату: засвоєння нового для суб'єкта досвіду у вигляді знань, умінь та навичок;

3) навчальна діяльність завжди інноваційна, спрямована на засвоєння нового для суб'єкта досвіду, але мета її ставиться найчастіше «зовні» — навчальним планом, програмою і т. д. — саме в цьому і проявляється парадоксальність навчальної діяльності [10].

Таким чином, навчальна діяльність містить в собі дві складові: зміст і форму. Кінцевий результат діяльності — перетворена діяльність, яка задовольняє пізнавальні та практичні потреби студентів і мислено представлена метою, образом та мотивом діяльності. В знаннях, в досвіді діяльності відтворюється не тільки їхня предметність, але й духовність, загальні та особистісні відносини, оцінки та способи застосування. Ці властивості, які складають зміст пізнавальної діяльності, мають різні джерела, а, рухаючись назустріч один одному, породжують пізнавальну діяльність, у зворотньому напрямку — це вже не діяльність, а просто реакція.

На підставі розглянутого ми вважаємо, що навчальна діяльність є пізнавальною.

У педагогічній літературі існують різні підходи до визначення поняття «навчально-пізнавальна діяльність». Це залежить від того, який підхід обрали автори до трактату, присвяченого визначенню самого поняття «навчально-пізнавальна діяльність». Згідно з дослідженням вченого П. Підкасистого [11] можна виділити три напрями щодо вивчення цього питання.

Першу групу складають дослідження, автори яких в основі визначення сутності діяльності вбачають спеціальну організацію всіх компонентів системи навчання в умовах підготовки, самопідготовки спеціалістів або беруть опис методів керівництва діями студентів, змістовні сторони виконаних ними завдань і значення останніх для виховання особистих якостей. Представниками є Р. Микельсон, І. Казанцев, В. Стрезікозіна, І. Федоренко, Б. Єсіпов. Об'єднує всі роботи цих авторів структура навчально-пізнавальної діяльності:

— визначення студентами поставленої перед ними задачі;

— участь студентів у плануванні роботи, особливо під час виконання практично-орієнтованих завдань;

— виконання роботи за даний проміжок часу;

— перевірка результатів роботи за допомогою викладача.

Автори *другої групи* (Р. Срода, Р. Лемберг, Н. Дайрі, Є. Голант) розглядають дане поняття як ступінь самостійності навчально-пізнавальних дій студентів при виконанні ними теоретичних і практичних робіт. Структуру навчально-пізнавальної діяльності вони визначають як послідовне виконання названих етапів:

— організаційно-технічний етап (студенти повинні вміти розподіляти роботу за часом виконання, здійснювати оцінку результатів для визначення ступеня засвоєння матеріалу);

— пізнавальний етап (студенти повинні оцінювати зміст матеріалу, який вивчається, збирати і систематизувати факти, порівнювати, робити висновки);

— практичний етап (студенти повинні виконувати практичні завдання).

При цьому формування всіх умінь починається під керівництвом викладача.

Третя група авторів трактує навчально-пізнавальну діяльність через характер і особливості поставлених перед студентами навчально-пізнавальних задач, які виступають як предмет їхньої діяльності. Вчені М. Данилов, М. Скаткін, В. Сластєнін, П. Підкасистий, В. Граф, І. Ільясов, В. Ляудіс представляють структуру навчально-пізнавальної діяльності як:

— планування конкретних способів одержання результатів;

— розумове визначення його параметрів;

— контроль за відповідністю одержаного результату і запланованим;

— діагностика причин невідповідності (якщо такі є);

— вибір принципу дії та методу;

— прогнозування варіантів дій;

— прийняття рішення, в тому числі шляхом вибору раціонального варіанта дій;

— визначення необхідної корекції первинного плану.

Під час виконання цих дій студент повинен уявити об'єкт діяльності, кінцеву мету, мисленно сконструювати і спрогнозувати процес реалізації цієї мети шляхом визначення в ньому складу компонентів, зіставити їх з повним складом, проаналізувати відмінності та пов'язані з ними особливості процесу, який вивчається, їх вплив на об'єкт діяльності.

Представники першої групи тільки частково відмічають функції викладача через його завдання, не підкреслюючи значення останнього та його вплив на окремі структурні ланки навчально-пізнавальної діяльності. У дослідженнях другої групи розглядається «внутрішня» сторона навчально-пізнавальної діяльності і не вивчаються питання організації та управління такою діяльністю. Представники третьої групи вважають, що «генетичною клітинкою навчально-пізнавальних робіт, їх цементуючим ядром є пізнавальна задача, запропонована студентам в конкретній ситуації і виступає як об'єкт їхньої діяльності» [11, 13].

Отже, чітка постановка навчально-пізнавальної задачі передбачає характер пізнавальної діяльності студента. Це дає викладачу можливість керувати такою діяльністю студента. Таким чином, головним компонентом структури навчальної діяльності є навчальна задача. «Навчальна задача виступає як певне навчальне завдання, яке має конкретну мету, для досягнення якої необхідно врахувати умови здійснення дії» [16, 507].

Теорію навчальних задач досліджували вчені Л. Фрідман та Є. Машбіц. Є. Машбіц висунув такі основні вимоги до проектування навчальних задач:

— навчальні задачі повинні забезпечувати засвоєння системи засобів, які є необхідним і достатнім інструментом навчальної діяльності;

— навчальна задача конструюється так, щоб відповідні засоби діяльності, засвоєння яких передбачається в процесі розв'язання задач, виступали результатом дій учнів, результатом навчання [16, 507].

В процесі діяльності навчальна задача пропонується у певній навчальній ситуації. За змістом навчальна ситуація може бути проблемною або нейтральною [4, 16]. «Проблемна ситуація є усвідомлена суб'єктом перешкода, яка може бути очевидною або невиразною. Шляхи подолання перешкоди вимагають пошуку нових знань, нових способів дій» [7, 18]. Необхідною умовою виникнення проблемної ситуації є наявність у суб'єкта можливостей (знань та дій) для аналізу умов виконання завдання.

Модель проблемної ситуації	Головна умова виникнення проблеми	Спосіб розв'язання
Модель поведінки	Перешкоди на шляху до мети	Подолання перешкод, обхідний шлях
Гештальт-модель	Деструктурованість умов та предмета мислення	Створення «доброї структури», розуміння
Ймовірнісна модель	«Перешкода», виражена в альтернативі	Вибір адекватної дії
Інформаційна модель	Невідповідність між наявними та необхідними знаннями	Досягнення нових знань, необхідної інформації

Як стверджує М. Махмутов, постановка навчальної проблеми здійснюється через наступні етапи: аналіз проблемної ситуації; пізнання сутності перешкоди — бачення проблеми; словесне формулювання проблеми [9].

Глибокий аналіз моделей проблемних ситуацій був проведений вченим О. Матюшкіним. Він виділив чотири основні моделі проблемної ситуації в залежності від умови її виникнення та розв'язання [8, 98].

П. Підкасистий в своїх дослідженнях розглядає співвідношення понять «проблема» і «питання». Питання спричиняє проблемну ситуацію в тому випадку, якщо воно виникає у свідомості учня як нерозв'язана перешкода. Навколо такого питання групуються інші, розв'язання яких вимагає від учня виявлення нових фактів, дослідження сутності предмета, закономірностей його розвитку. Як правило, таке питання є центральним у проблемі, тому його умовно можна ототожнити з проблемою в навчанні [12]. Постановка питання-проблеми є основою пізнавальної задачі та розуміння суб'єктом навчання пошукової ситуації.

Вчений Я. Пономарьов, досліджуючи процес творчості в світі системно-структурного підходу, виділяє наступні поняття: «пізнавальна проблема», «пізнавальна задача», «мисленнєва задача». Мисленнєва задача — задача завжди творча. Вона може і не бути пізнавальною. Пізнавальна задача пов'язана з конкретною потребою — набуттям знань. Мисленнєва задача може бути в контексті будь-яких потреб. Мисленнєву задачу можна і потрібно розв'язувати не маючи нових знань свідомо. Таку задачу ставити не потрібно — вона з'явиться в ході самої ситуації. В результаті розв'язання мисленнєвої задачі, якщо вона співпала з пізнавальною, виникають нові знання, які змінюють ситуацію. Проблема — це складна пізнавальна творча задача. Якщо задача ситуативна, її необхідно перетворити на проблему, потім проблему треба дослідити: виділити стратегію розв'язання, розділити на пізнавальні задачі, по черзі перетворюючи їх на мисленнєві. Під час рішення проблеми обов'язково виникають нові знання, які виконують допоміжну роль при знаходженні кінцевого розв'язку [13].

Вчені по-різному пропонують розв'язувати проблему. Наприклад, О. Матюшкін виділяє п'ять етапів [8, 236]:

— виникнення проблемної ситуації;

— використання відомих способів розв'язання — етап «закритого» розв'язання проблеми;

— розширення області пошуку нових способів розв'язання — етап «відкритого» розв'язання проблеми — знаходження нового відношення чи принципу дії;

— реалізація знайденого принципу;

— перевірка правильності одержаного результату.

М. Махмутов вбачає розв'язання навчальної проблеми як [9]:

— використання минулого досвіду;

— аналітичний спосіб розв'язання (аналіз засобів розв'язання, аналіз мети, аналіз підмети, порівняння досягнутого з основною метою, в результаті порівняння мети і підмети виділити елементарні задачі для подальшого пошуку результату до тих пір, поки задача не буде вирішена);

— складання плану розв'язання.

Вивченням навчально-пізнавальної діяльності займається цілий ряд наук: педагогіка, психологія, соціологія, філософія. Навчання є об'єктом філософського аналізу тому, що воно виділяється як пізнавальна діяльність. Наукове пізнання відрізняється від навчально-пізнавальної діяльності. Перше відкриває нові знання людству, а друге — нові знання суб'єкту. В процесі навчально-пізнавальної діяльності можуть брати участь як викладачі, так і студенти, якщо заняття проводяться колективно або в мікрогрупах, де здійснюється взаємоконтроль та допомога.

Найбільш продуктивною є самостійна навчально-пізнавальна діяльність (СНПД). Актуальним сьогодні є твердження Дістервега про те, що «знання можна запропонувати, але володіти ними може і повинен кожен самостійно».

Слід зазначити, що в психолого-педагогічній літературі вживаються і ототожнюються такі поняття: «пізнавальна самостійність», «самостійна діяльність», «самостійна робота», «самоосвіта». Зупинимося на деяких з них:

П. Підкасистий	Самостійна навчальна діяльність — процес відображення та перетворення в свідомості суб'єктів явищ об'єктивної дійсності. Цей процес характеризується наступними структурними компонентами: виділення мети діяльності, виділення предмета діяльності, вибір засобів діяльності. Головною ознакою є не навчання суб'єкта без сторонньої допомоги, а те, що його діяльність одночасно несе в собі функцію управління цією діяльністю. Самостійна робота — засіб організації навчального або наукового пізнання студента; виступає як єдність двох якостей: як об'єкт діяльності студента і як форма його способу діяльності для виконання навчального завдання з метою одержання нових знань або поглиблення набутих [11, 50].
В. Козаков	Самостійна робота студента — це специфічний вид діяльності, метою якого є формування самостійності суб'єкта, а формування його умінь, знань та навичок здійснюється через зміст і методи всіх видів навчальних занять [5, 14—15].
А. Юрков	Самостійна пізнавальна діяльність є головним засобом перетворення теоретичних знань у переконання, формування активної позиції особистості в навчально-виховному процесі, соціальних відносинах, професійній діяльності [14, 3].
А. Громцева	Самоосвіта — керована самим учнем систематична пізнавальна діяльність, спрямована на удосконалення його освіти [2, 28].
Т. Шамова	Пізнавальна самостійність — риса особистості, яка характеризується прагненням та умінням учнів без сторонньої допомоги оволодівати знаннями та способами діяльності, розв'язувати пізнавальні задачі з метою подальшого перетворення та вдосконалення середовища [17, с. 60].
М. Солдатенко	Самоосвіта — процес, який здійснюється за внутрішньою потребою людини, її власною ініціативою і ставить на меті задоволення різнобічних інтересів і запитів, розширення світогляду, вирішення задач самовиховання та підвищення професійного рівня спеціаліста [15, с. 81].
І. Шимко	Самостійна робота — цілеспрямована, внутрішньо вмотивована, структурована самим суб'єктом в сукупності виконуваних дій і корегована ним за процесом і результатом діяльності [19].

Ми згодні з авторами, які вважають, що:

— самостійна робота і самостійна діяльність мають різні значення: робота — є засіб такої діяльності;

— самостійна діяльність і самостійна пізнавальна діяльність відрізняються тим, що самостійна діяльність може бути тільки відтворюючою, спиратись на запам'ятовування певного матеріалу, тому навіть при сумлінному відношенні до занять не викликає особливої активності та творчості у студентів, не формує мислення; самостійна пізнавальна діяльність спрямована на формування нових знань для суб'єкта; таким чином, самостійна діяльність — це початковий рівень самостійної пізнавальної діяльності;

— правильно організована СНПД є підґрунтям самоосвіти в майбутній професійній діяльності;

— пізнавальна самостійність є рисою особистості, яка прагне до СНПД, вміє знаходити і застосовувати знання для якісного розв'язання пізнавальних та навчально-професійних задач, свідомо регулювати та адекватно оцінювати власну пізнавальну діяльність.

Таким чином, розглянувши різні точки зору відносно поняття «навчально-пізнавальна діяльність», можна вказати основні ознаки цієї діяльності.

1. Зовнішні. До них входять: планування студентами своєї роботи; виконання завдань без детального інструктажу та безпосередньої допомоги викладача.

2. Внутрішні. Виражені у виявленні студентами самостійності та творчої активності при розв'язанні ними навчально-пізнавальних задач: від завдання за зразком до частково-пошукових та дослідницьких дій. При цьому самостійна навчально-пізнавальна діяльність зазнає якісних змін та поступово розвивається.

3. Загальні. Мають такі характеристики: наявність навчально-пізнавальної задачі; проведення студентами самокорекції; наявність в навчальному завданні такого дидактичного матеріалу, засвоєння якого сприяє розвитку особистості [11].

Виходячи з цих положень, визначаємо СНПД як активну діяльність особистості, яка стимульована потребами, мотивами, інтересами, може самостійно зорієнтуватися в ситуації, набути нових необхідних знань, правильно поставити мету дій у відповідності до об'єктивних законів та наявних обставин, які визначають реальність та досяжність мети; а потім згідно з ситуацією, метою та умовами визначити конкретні способи і засоби дій, в процесі дій відпрацювати, удосконалити їх і, нарешті, досягнути мети. Результатом СНПД є розвиток самої особистості, формування її аналітичного мислення, яке є основою більш розвинених видів, таких як творче, критичне тощо.

Оскільки СНПД — це діяльність людини, то вона має такі основні характеристики: мотив, мету, предмет, структуру і засоби. Розглянемо ці характеристики детальніше.

Мотив СНПД — система ідейно-професійних переконань (бажання стати кваліфікованим спеціалістом, поглибити знання зі спеціальності) та система соціально цінних мотивів (інтерес до наукового пошуку, прагнення до інтелектуального розвитку, бажання розширити свій світогляд).

Мета СНПД — нові знання, вміння та навички.

Предмет СНПД — інформація.

Структура СНПД — проект, технології та рефлексія. Проектом виступає вивчення окремих навчальних курсів; технологія — це система форм, методів і засобів розв'язання проблеми; рефлексія — постійний аналіз мети, задач, процесів, результатів.

Засоби СНПД. Засіб — це те, за допомогою чого і через що здійснюється діяльність. Ми виділяємо наступні засоби самостійної навчально-пізнавальної діяльності:

— теоретичні: засоби-операції та засоби-дії;

— емпіричні: засоби-операції.

До теоретичних засобів-операцій будемо відносити мисленнєві операції: аналіз та синтез, порівняння, абстрагування, конкретизація та інші, які формуються та розвиваються в процесі самої діяльності.

Теоретичні засоби-дії містять в собі наукові теорії, які виступають у формі метода, виявлення та розв'язання суперечностей, постановки проблеми, побудови гіпотез, моделювання ситуації тощо.

До емпіричних засобів-операцій відносяться такі засоби, як спостереження, вивчення літературних та документальних джерел. Останні конкретизуються, по-перше, як робота з підручником; по-друге, при роботі з комп'ютером — це теж робота з текстом; по-третє, в процесі прослуховування та пояснень викладача в ході лекції, практичного заняття — це теж робота з текстом. Також до емпіричних засобів-операцій можна віднести досліди, експерименти, конспектування, підготовку доповідей, розв'язання задач (вправ), бо без постійного тренування ніяких умінь та навичок сформувати неможливо.

У подальшому, відповідно до суті СНПД, було розроблено нові навчальні програми і технології: теорія поетапного формування розумових дій, теорія програмованого навчання, теорія проблемного навчання тощо.

Останнім часом в психології та педагогіці порушується питання щодо формування індивідуального стилю пізнавальної діяльності студента як резерву підвищення ефективності СНПД. «Індивідуальний стиль виступає одночасно і як конкретний спосіб вираження відношення особистості до діяльності, яку вона виконує, і як умова формування в подальшому у суб'єкта активно-творчого до неї відношення» [20, 164]. Інший підхід ми бачимо в дослідженях М. Холодної, яка вводить поняття «персональний пізнавальний стиль діяльності», який будується відповідно до інтелектуального розвитку людини. Автор пропонує програму формування персонального пізнавального стилю в процесі навчання, і в даному випадку ліквідуються індивідуальні пізнавальні стилі [18].

У науковій літературі та із власного викладацького досвіду одержано велику кількість експериментальних даних, які характеризують нерівномірний і неоднаковий ступінь СНПД особистості. Пов'язано це з тим, що розвиток студента обумовлений взаємодією багатьох факторів: спадковістю, особистісними якостями, навколишнім середовищем, власним минулим досвідом, несформованістю прийомів мисленнєвої діяльності. Все це обумовлює необхідність гнучкого, особистісно орієнтованого характеру діяльності викладача.

Таким чином, подальші дослідження, на наш погляд, треба присвятити створенню цілісної педагогічної системи формування аналітичного мислення студентів засобами СНПД.

Література

1. *Граф В., Ильясов И. И., Ляудис В. Я.* Основы организации учебной деятельности и самостоятельной работы студентов: Учеб.-метод. пособие. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. — 80 с.

2. *Громцева А. К.* Самообразование учащихся средних профтехучилищ / Отв. ред. В. В. Шапкин. — М.: Высш. шк., 1987. — 119 с.

3. *Давыдов В. В.* Теория развивающего обучения. — М.: ОПЦ ИНТОР, 1996. — 541 с.

4. *Зимняя И. А.* Педагогическая психология: Учеб. для вузов. — 2-е изд., доп., испр. и перераб. — М.: Логос, 2002. — 384 с.

5. *Козаков В. А.* Самостоятельная работа студентов и ее информационно-методическое обеспечение: Учеб. пособие. — К.: Выща шк., 1990. — 248 с.

6. *Леонтьев А. Н.* Деятельность. Сознание. Личность. — Изд. 2-е. — М.: Политиздат, 1977. — 304 с.

7. *Лернер И. Я.* Проблемное обучение. — М.: Знание, 1974. — 64 с.

8. *Матюшкин А. М.* Мышление, обучение, творчество. — М.: Изд-во Моск. психол. -социального ин-та; Воронеж: Изд-во НПО «МОДЭК», 2003. — 720 с.

9. *Махмутов М. И.* Организация проблемного обучения в школе: Книга для учителей. — М.: Просвещение, 1977. — 240 с.

10. *Новиков А. М.* Методология учебной деятельности. — М.: Эгвес, 2005. — 176 с.

11. *Пидкасистый П. И.* Организация учебно-познавательной деятельности студентов: Учеб. пособ. — М.: Пед. о-во России, 2004. — 112 с.

12. *Пидкасистый П. И.* Самостоятельная деятельность учащихся: Дидактический анализ процесса и структуры воспроизведения и творчества. — М.: Педагогика, 1972. — 184 с.

13. *Пономарев Я. А.* Психология творчества и педагогика. — М.: Педагогика, 1976. — 280 с.

14. Самостоятельная работа студентов: поиски, проблемы, решения: Сборник / Под ред. А. М. Юркова. — Ростов н/Д: Изд-во Ростов. ун-та, 1991. — 176 с.

15. *Солдатенко М. М.* Теорія і практика самостійної пізнавальної діяльності: Монографія. — К.: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2006. — 198 с.

16. *Столяренко Л. Д.* Основы психологии. — Ростов н/Д: Феникс, 2003. — 671 с.

17. Формирование познавательной самостоятельности школьников в процессе усвоения системы ведущих знаний и способов деятельности: Сб. науч. ст. / Под ред. Т. И. Шамовой. — М., 1975.

18. *Холодная М. А.* Когнитивные стили. О природе индивидуального ума. — 2-е изд. — С.Пб.: Питер, 2004. — 384 с.

19. *Шимко І. М.* Дидактичні умови організації самостійної навчальної роботи студентів вищих навчальних закладів: Дис. ... канд. пед. наук. — Кривий Ріг, 2003. — 181 с.

20. *Якунин В. А.* Педагогическая психология: Учебн. пособ. — 2-е изд. — С.Пб.: Изд-во В. А. Михайлова, 2000. — 349 с.

С. М. ШЕВЧЕНКО,
ст. викладач кафедри вищої математики Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій м. Києва.

Новий всеукраїнський конкурс учнівських та педагогічних робіт

«Здорова планета – здоровий ти!»

Організатори:

Інститут інноваційних технологій і змісту освіти МОН України

Видавництво «Шкільний світ»

Компанія «Філіпс Україна»

Головні теми:

«Здоровий спосіб життя»

«Енергозбереження»

«Охорона навколишнього середовища»

Термін реалізації:

з 15 вересня 2009 р. до 20 травня 2010 р.

Дні вчителів та дні газет у 2010 році

28 січня **День газети «ІСТОРІЯ»**

18 березня **День газети «ХІМІЯ»**

26 березня **День газети «КРАЄЗНАВСТВО. ГЕОГРАФІЯ. ТУРИЗМ»**

7 квітня **День газет «БІОЛОГІЯ» та «ЗДОРОВ'Я ТА ФІЗИЧНА КУЛЬТУРА»**

21 квітня **День газети «ПОЗАШКІЛЛЯ»**

22 квітня **День газети «ПСИХОЛОГ»: «Вернісаж майстер-класів»**

Місце проведення – Київський міський Будинок учителя